কলন-বিদ্যা

ঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

কলন-বিদ্যা

(প্রথম ভাগ)

(CALCULUS)

অধ্যাপক মহাদেব দত্ত, এম্.এস্-সি, ডি.ফিল্
সত্যেন্দ্রনাথ বসু গবেষণা সংস্থা, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়
এবং ফলিত গণিতের উচ্চশিক্ষার কেন্দ্র, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়

শান্তি কুমার চট্টোপাধ্যায়, পি-এইচ্.ডি, ডি.এস্-সি
বিশুদ্ধ গণিত বিভাগের রীডার, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়

পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ

KALAN BIDYA

MAHADEB DUTTA, SANTI KUMAR CHATTOPADHYAY

প্রকাশক :
পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদ
(পশ্চিমবঙ্গ সরকারের একটি সংস্থা)
৬।এ, রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার (নবমতল)
কলিকাতা-৭০০ ০১৩

মুদ্রক :
সুরেশ দত্ত
মডার্ন প্রিণ্টার্স
১২, উল্টাডাঙ্গা মেইন রোড
কলিকাতা-৭০০ ০৬৭

চিত্রাঙ্কন : শ্রীসুবল মিত্র
প্রচ্ছদ : শ্রীপ্রশান্ত হাজরা

উৎসর্গ

মাতৃভাষায় বিজ্ঞানের শিক্ষা, গবেষণা ও প্রচারের প্রবক্তা রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর, সত্যেন্দ্রনাথ বসু, রামেন্দ্রসুন্দর ত্রিবেদী প্রমুখ আচার্যদের স্মৃতিতে এই প্রয়াস উৎসর্গ করা হল।

ভূমিকা

বাংলা ভাষায় আলোচনার যৌক্তিকতা ও অন্তরায়ঃ ভাষা ভাব-প্রকাশের মাধ্যম। বিভিন্ন গোষ্ঠীর বিভিন্ন ভাষা। গোষ্ঠীর নিজস্ব চিন্তাধারার সুষ্ঠু প্রকাশের জন্য গড়ে উঠেছে বিভিন্ন ভাষা। গোষ্ঠীর ভাবপ্রকাশের নিজস্ব ধরণের সঙ্গে ভাষা ঘনিষ্ঠভাবে জড়িত। গোষ্ঠীর একজনের ভাবপ্রকাশের সহজতম ও সুষ্ঠু প্রকাশ হয় তার নিজস্ব ভাষায় বা মাতৃভাষায়। যে কোন চিন্তা কেউ নিজস্ব করে নিতে পারলে মাতৃভাষায় তা প্রকাশ করা সম্ভব—সে চিন্তা বিজ্ঞানেরই হোক্, দর্শনেরই হোক্ বা সাহিত্যেরই হোক্। বিজ্ঞানের বা গণিতের কোন ভাব-ধারণা নিজস্ব করে নিতে পারলে তা মাতৃভাষায় সুষ্ঠুভাবে প্রকাশ করা সম্ভব—না পারলে ভেবে দেখা উচিত যে ওই চিন্তা ঠিক ঠিক ভাবে আয়ত্ব করে নিজস্ব করে নেওয়া গেছে কিনা।

উপরে যে মন্তব্য করা হল সে বিষয়ে কিছুটা মতবিরোধ আছে। কেউ কেউ বলেন, যেহেতু আমাদের মাতৃভাষায় (বাংলায়) বিজ্ঞানের সমৃদ্ধ পরিভাষা নেই, কাজেই বাংলা ভাষায় বিজ্ঞান আলোচনা করা কষ্টকর—প্রায় অসম্ভব। তবুও যারা বাংলা ভাষায় বিজ্ঞান বা গণিত প্রকাশের চেষ্টা করেছেন তারা জানেন যে বৈজ্ঞানিক (গাণিতিক) পরিভাষার সমৃদ্ধির অভাবে বাংলা ভাষায় বিজ্ঞানের বিষয়বস্তু প্রকাশ করা কোন কোন জায়গায় কিছুটা কষ্টসাধ্য হয় বটে, তবে মোটামুটিভাবে বলা যায় এটা অসাধ্য বা অসম্ভব নয়। ইংরাজীতে চিন্তা করে নিয়ে বা বই চোখের সামনে রেখে তার বাংলা অনুবাদ করা যতটা কষ্টসাধ্য, বিজ্ঞানের বিষয়বস্তু পরিষ্কার করে ধারণা করে নিয়ে তা প্রকাশ করা ততটা কষ্টসাধ্য নয়। অনুবাদের চেষ্টা না করে স্বাধীন-ভাবে বিজ্ঞানের বিষয়বস্তু বোঝার চেষ্টা করলে পরিভাষার অসুবিধা অনেকটা কাটিয়ে ওঠা যায়। আর এ চেষ্টায় লাভ হবে—যে এই বিষয়বস্তুর সহিত পরিচয় লাভ করেছে সে যেমন বিজ্ঞানের (গণিতের) বিষয় শিখতে পারবে এবং তার পক্ষে এটা যতটা সহজসাধ্য ও যতটা গভীর হবে তার তুলনায় তার অনভ্যস্ত বিদেশী ভাষা মারফৎ ওই-সব বিষয়ে শিক্ষা পরিশ্রমসাপেক্ষ এবং শিক্ষার গভীরতা অনেক কম। অবশ্যই যিনি বিদেশী ভাষার মাধ্যমে বিজ্ঞানের বিষয় আয়ত্ত করে মাতৃভাষায় তা প্রকাশ করতে যাবেন তাঁর পক্ষে এ চেষ্টা বেশ কিছুটা কষ্টকর, এ বিষয়ে সন্দেহ নেই, কিন্তু ছাত্রদের ও পাঠকদের কথা বিবেচনা করে এ কষ্ট স্বীকার করার জন্য এগিয়ে আসতে হবে।

পরিভাষার সম্বন্ধে বলা যায় কতকগুলি নিয়ম মেনে চললে পরিভাষার অসুবিধা কিছুটা কমিয়ে আনা যায়। আন্তর্জাতিক পরিভাষা অর্থাৎ যে পরিভাষা সামান্য পরিবর্তন বা পরিমার্জন করে বিজ্ঞানের (গণিতের) অন্ততঃ তিন চারটি অগ্রসর জাতি ব্যবহার করেছেন তা প্রয়োজনমত গ্রহণ করা যেতে পারে। যেমন ইংরেজরা যাকে function বলেন, ফরাসীরা তাকে fonction বলেন, জার্মানরা তাকে Funktion বলেন, রাশিয়ানরা তাকে Funkcija বলেন এবং অপরাপর জাতি তাকে সামান্য পরিবর্তন করে ব্যবহার করেন (যেমন ইটালীয়ানরা funzione বলেন, স্পেনবাসীরা funcion বলেন, ইত্যাদি)। আমরাও একথাটি আমাদের মাতৃভাষার সঙ্গে খাপ খাওয়ানোর জন্য দরকার হলে ব্যবহার করবো, যদিও হিন্দীভাষায় একে 'ফলন' করা হয়েছে এবং বাংলা ভাষায় 'অপেক্ষক' ব্যবহার করা হচ্ছে। যে সব পরিভাষা মাতৃ-ভাষায় প্রচলিত আছে তার সঠিক সংজ্ঞা নির্দেশ করে ব্যবহার করা হয়। যেমন 'মূলদ' কথাটি বাংলায় প্রচলিত আছে, এটিকে ঠিক সংজ্ঞা নির্ধারণ করে ব্যবহার করা উচিত। এ ছাড়া যেখানে সহজেই পরিভাষা করে নেওয়া যাবে সেখানে সেটা করা উচিত—যেমন rational কে যৌক্তিক*, irrational কে অযৌক্তিক, imaginary কে কাল্পনিক এবং real কে বাস্তব করে নেওয়া উচিত। এগুলির কিছু কিছু প্রচলন শুরু হয়ে গেছে। এ ছাড়া যদি এমন কোন কথা আলোচনায় এসে যায় যার পরিভাষা আগে যে সব কথা বলা হল তার মধ্যে পড়ছে না এবং এর সহজ পরিভাষা এখন ভাবা যাচ্ছে না, তাহলে বর্তমানে বিদেশী পরিভাষা ব্যবহার করা চলতে পারে। আর আমরা এই যে চেয়ারে বসে টেবিলে খাতা রেখে বইটির খসড়া করছি, এর মধ্যে চেয়ার, টেবিল, খসড়া সবই তো বিদেশী কথা, কিন্তু এগুলিকে বাংলায় এমনভাবে নেওয়া হয়েছে যে বর্তমানে এর অনুবাদ করতে যাওয়াই হাস্যকর। যদি দুই একটি বিদেশী পরিভাষা বাংলাতে নিজস্ব করে নেওয়া হয় তবে আপত্তির কিছু থাকে কি ?—বরং ভাষার সমৃদ্ধি হয়।

বিষয়বস্তুর মূলধারণার নূতনত্ব ও গুরুত্ব : এ পর্য্যন্ত ভাবপ্রকাশের কথা বলা হল। এখন মূল ভাবের বিষয়ে কয়েকটি কথা বলা হচ্ছে। আমাদের আলোচনার বিষয় কলন-বিদ্যা। ভাবের দিক থেকে এটা কিছুটা নূতন। এ পর্যন্ত ছাত্রদের বা পাঠকদের গণিতের যে সব শাখার সঙ্গে পরিচয় হয়েছে সেগুলি মোটামুটিভাবে পাটিগণিত, বীজগণিত, জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি। এর মধ্যে জ্যামিতি ছাড়া যে সব গণিতের শাখার সঙ্গে পরিচয় ঘটেছে তার সবকটিতে সংখ্যা ও তার মূলগত চারটি প্রক্রিয়ার উপর নির্ভর করে নানারকম আলোচনা হয়েছে। এই চারটি মূলগত প্রক্রিয়া

* এই গ্রন্থের পৃষ্ঠা ৬এ বিশেষ দ্রষ্টব্য দেখুন।

বলতে বুঝানো হয়েছে—যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ। বিয়োগ প্রক্রিয়ার দিক থেকে পৃথক হলেও বীজগণিতের দিক থেকে দেখলে বুঝা যায় ইহা যোগের বিপরীত প্রক্রিয়া। সেভাবে ভাগও গুণের বিপরীত প্রক্রিয়া। আবার গুণও পৌনঃপুনিক যোগ ছাড়া কিছু নয়। এখন সংখ্যার ধারণা শৈশবেই নানা অভিজ্ঞতা থেকে মানুষ কিছুটা শেখে। যোগও ঠিক একইভাবে শৈশবেই সাধারণ অভিজ্ঞতা থেকে শেখে। যেমন একটি লজেনস্, দুটি লজেনস্, একটি ভাই, দুটি ভাই প্রভৃতি। আবার দুটি লজেনস্ আর দুটি লজেনসে হয় চারটি লজেনস্। পরে গণিত শিক্ষার সময় এই সহজ ও সাধরণ অভিজ্ঞতা থেকে শেখা গণিতের ধারণা পরিবর্তন ও পরিমার্জন করা হয়। এদিক দিয়ে এর আগে গণিতের যে সব শাখার সঙ্গে ছাত্রদের পরিচয় হয়েছে তা অনেকটা সহজ, সরল ও সরাসরি অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। আর জ্যামিতি তো দৃষ্টবস্তুদের আকার সম্বন্ধে আলোচনা, এরও একটা সরাসরি অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি আছে। এই দৃষ্টিভঙ্গী থেকে দেখলে গণিতের আগের বিষয়গুলি অনেকটা সহজ। কেবল স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি একটু নূতন ধরণের—বীজগণিত সেখানে আলোচনার মাধ্যম এবং এই বীজগণিতের প্রয়োগে জ্যামিতির আলোচনাই স্থানাঙ্ক-জ্যামিতির বিষয়বস্তু।

এদিক থেকে কলন-বিদ্যা কিছুটা নূতন ধরণের। অবশ্য কলনবিদ্যায় উপরোক্ত মূলগত চারটি প্রক্রিয়া ত আছেই, কিন্তু উপরোক্ত চারটির সহিত আরও একটি নূতন প্রক্রিয়ার প্রবর্তন ও প্রয়োগ করা হয়—সেটা হচ্ছে সীমা সংক্রান্ত প্রক্রিয়া। আবার এর সঙ্গে আর একটি নূতন ধরণের ধারণার প্রয়োজন হয়—সেটা হচ্ছে অসীমের ধারণা। অসীমের ধারণা সরাসরি অভিজ্ঞতালব্ধ নয়, যদিও এ ধারণার মূল অভিজ্ঞতায় তবুও এ ধারণা সুস্পষ্ট হয় কল্পনার আশ্রয়ে। আমাদের সাধারণ আলোচনায় আমরা বলি বড়, তার চেয়ে বড়, সবার চেয়ে বড়, তার চেয়ে বড় এবং আরও বড়—এভাবে ধারণা করতে করতে অভিজ্ঞতায় আমরা যত বড় দেখি তাদের সবার চেয়ে বড় একটা কল্পনা করি, এভাবেই অসীমের ধারণা করা হয়। কাজেই এই অসীমের ধারণা ঠিক পুরোপুরি অভিজ্ঞতালব্ধ নয়, যদিও ইহা অভিজ্ঞতাভিত্তিক তবুও কিছুটা কল্পনাশ্রয়ী। অনুরূপ-ভাবে ছোট জিনিস যা দেখছি, তার চেয়েও ছোট, আরও ছোট, খুব খুব ছোট, এরকম ধারণা আমরা করি। এসব ধারণা করা হয় এই কলন-বিদ্যায়। আবার একটি সংখ্যা যদি অন্য একটি সংখ্যার উপর নির্ভরশীল হয়, তাহলে যার উপর নির্ভর করছে সে যখন খুব খুব বড় হয়ে গেল বা খুব খুব ছোট হল, তখন নির্ভরশীল সংখ্যাটি কি রকম হয়—এর থেকে পাওয়া যায় সীমার ধারণা। সীমার ধারণার সময় সংখ্যা স্থির থাকে না বলে একে বলা হয় 'চল' (variable)। এই চলরাশিটি কখনও যে কোন

সসীম সংখ্যার চেয়ে বড় হতে হতে অসীমে চলে যায়, কখনও বা শূন্যের যত কাছে সম্ভব পৌঁছায়, আবার কখনও কোন এক ধ্রুবকের যত কাছে সম্ভব পৌঁছায়। এ চলরাশিটির পরিবর্তনের উপর যদি আর একটি চলরাশির পরিবর্তন হয় তাহলে ফাংশনের ধারণা আসে। অতএব ফাংশনের সীমার ধারণার সময় দুটি সীমার কথা আসে—একটি স্বাধীন বা নিরপেক্ষ (independent) চলরাশির সীমা, আর একটি নির্ভরশীল (dependent) চলরাশির সীমা। ফাংশনের ধারণা, অসীমের ধারণা এবং সীমা নির্ধারণ কলনবিদ্যার মূলগত বৈশিষ্ট্য। এই কারণেই কলনবিদ্যা গণিতের অপরাপর শাখাগুলি যাদের নাম আগে বলা হয়েছে তাদের থেকে নূতন ধরণের এবং একে আয়ত্ত করা তুলনামূলকভাবে কিছুটা কষ্টসাধ্য, অন্ততঃ ইহা সতর্ক ও সজাগভাবে শেখার বিষয়। কিন্তু সামান্য কষ্টসাধ্য হলেও কলন-বিদ্যার আলোচনা বাদ দিয়ে গণিতের তথা বিজ্ঞানের আলোচনা সম্পূর্ণ করা সম্ভব নয়। বিজ্ঞানের বিস্তীর্ণ শাখায়, মানুষের ব্যবহারিক জীবনে বহু সমস্যার গণিতের সাহায্যে সমাধানে কলনবিদ্যার প্রচুর প্রয়োগ আছে, কাজেই এর শিক্ষা না হলে বিজ্ঞান বা বিশেষভাবে গণিতশিক্ষা অসম্পূর্ণ থেকে যায়।

কলন-বিদ্যার ভাগ সম্বন্ধে মন্তব্য: কলন-বিদ্যা সাধারণতঃ দুভাগে আলোচনা করা হয়—একটিতে অন্তরকলন, অপরটিতে সমাকলন। অবশ্য কলন-বিদ্যার খুব যুক্তিসিদ্ধ আলোচনায় এই দুটিকে এরূপ পৃথকভাবে দেখা চলে না বা দেখা উচিত নয়। অনেক আন্তর্জাতিক খ্যাতি সম্পন্ন পুস্তকে এই দুটি পাশাপাশি আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু যে কোন কারণেই হোক আমাদের দেশে এ দুটি পৃথকভাবেই পাঠ্যসূচীতে দেখানো হয় ও শেখানো হয়। কাজেই ছাত্র ও শিক্ষকের সুবিধার জন্য এ আলোচনাকে দুভাগে ভাগ করতে হল—প্রথম ভাগ অন্তরকলন এবং দ্বিতীয় ভাগ সমাকলন। এগুলি বলতে কি বুঝায় সেতো বইএর মধ্যে পাওয়া যাবে, এখানে তার বিস্তৃত আলোচনা করা হল না।

সাধারণ পাঠ্যপুস্তক সম্বন্ধে মন্তব্য: আমাদের দেশে সাধারণতঃ যে সব পাঠ্যপুস্তক চালু আছে তার ভাষা ইংরাজী আর বিষয়বস্তুও যথাযথভাবে আলোচিত হয় না। অসীমের ধারণা ও সীমানির্ধারণ প্রক্রিয়ার মূল কথা সুস্পষ্টভাবে বা পরিষ্কার করে বলা হয় না বা এমনভাবে বলা হয় যাতে পাঠকদের মনে কিছুটা ভুল ধারণার সৃষ্টি হতে পারে। বর্তমান আলোচনায় এ বিষয়ে যথাসম্ভব সতর্কতা নেওয়া হবে। আবার কলনবিদ্যা দিয়ে চিরাচরিত জ্যামিতি ও গতিবিদ্যার আলোচনা করা হয়। কিন্তু আজকাল এই কলনবিদ্যা দিয়ে আরও নানা আলোচনা করা হচ্ছে—যেমন অর্থনীতি ও

জীববিদ্যার আলোচনা, এই সব আলোচনার উল্লেখ সাধারণ পাঠ্যপুস্তকে থাকে না। বর্তমান পুস্তকে এ বিষয়ে সাধ্যমত আলোচনা করার চেষ্টা করা হবে।

বর্তমান আলোচনা সাধ্যমত এমনভাবে চেষ্টা করা হবে যে একজন আগ্রহশীল পাঠক যার আগে সামান্য গণিতের সঙ্গে পরিচয় আছে, সহজেই বর্তমান বিদ্যার কথা আয়ত্ত করতে পারবেন। যারা শিক্ষকের সাহায্যে এই বই পড়বেন তাদের কাছেও এ বই সহজ ও সরল হবে বলে আশা করা যায়। এই উদ্দেশ্য যদি সফল হয় তবেই আমাদের এই প্রচেষ্টা সার্থক বলে মনে করা হবে।

অবশ্যপাঠ্য বিষয়বস্তু ও যা ছাত্রদের পরীক্ষার দিক দিয়েও প্রয়োজন তা সাধারণ হরফে লেখা হবে এবং বিশেষ গুরুত্ব দেবার জন্য কিছু অংশে স্থূল হরফ ব্যবহার করা হবে। বিষয়বস্তুর যে সব অংশ সাধারণতঃ শেখা উচিত, কিন্তু বর্তমান শিক্ষাব্যবস্থায় পরীক্ষার জন্য প্রয়োজনীয় নয় তা সামান্য ছোট হরফে দেওয়া হবে; যারা বিষয়টি ভালভাবে আয়ত্ত করতে চান তারা এগুলিও যেন ভাল করে শেখেন।

ধন্যবাদ জ্ঞাপন :

যাদের শুভেচ্ছায় ও উৎসাহে গণিত-শিক্ষার মান-সঙ্গত পাঠ্যপুস্তকরূপে এটি লেখা হল আমরা তাঁদের নিকট আন্তরিক কৃতজ্ঞতা ও ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি। আমরা এ পুস্তকটি বাংলার গুণগ্রাহী শিক্ষক-শিক্ষিকা সমাজের গ্রহণীয় হবে আশা করি। অনবধানতাপ্রসূত ভুলত্রুটি সম্বন্ধে আমাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করলে আমরা চির-কৃতজ্ঞ থাকব। ঋষিকল্প মহান জাতীয় অধ্যাপক বিজ্ঞানাচার্য সত্যেন্দ্রনাথ বসুর প্রেরণায় আমাদের বাংলা ভাষায় গণিতের পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ণের এই আরম্ভ শুভ হোক, এই প্রচেষ্টা সার্থক হোক।

ইতি—

মহাদেব দত্ত

শান্তি কুমার চট্টোপাধ্যায়

বিষয়-সূচী

সূচনা

সাধারণ মন্তব্য : (চারটি প্রক্রিয়ার পরও আর একটি মূলগত প্রক্রিয়ার প্রয়োজনীয়তা)

শিশুর গণিত শিক্ষা আরম্ভ হয় পাটীগণিত দিয়ে, ধীরে ধীরে সে শেখে বীজগণিত, জ্যামিতি। যারা গণিতের শিক্ষায় আরও অগ্রসর হতে চায় তারা পরে শেখে স্থানাঙ্ক-জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি প্রভৃতি। প্রাক্ কলন-বিদ্যার শিক্ষায় ছাত্র বা পাঠকের গণিতের এই সব শাখার সহিত সাধারণভাবে পরিচয় ঘটে।

পাটীগণিতে শিক্ষা শুরু হয় স্বাভাবিক সংখ্যা (ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা) ও মূলগত চারটি প্রক্রিয়ার শেখার মধ্য দিয়ে। ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যারা অসম্বন্ধ (discrete)। মূলগত চারটি প্রক্রিয়া হচ্ছে—যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ। পরে পাটীগণিতে আর যা কিছু শিখুক না কেন সবই সংখ্যা ও ঐ চারটি প্রক্রিয়ার নানারূপ সরল ও মিশ্র প্রয়োগ। বীজগণিতের শিক্ষা সংখ্যা ও তার চারিটি মূলগত প্রক্রিয়া থেকেই শুরু, তবে আলোচনা-পদ্ধতি পাটীগণিতের থেকে কিছুটা ভিন্ন। আলোচনাকে আরও সাধারণ ও সামান্যী-করণ করার জন্য বীজগণিতে সংখ্যার বদলে সাধারণত প্রতীক ব্যবহার করা হয় এবং পরে বীজগণিতে যাই আলোচনা আসুক না কেন তাহা মূলতঃ সংখ্যা ও ঐ চারিটি প্রক্রিয়া ভিত্তি করে নানারূপ আলোচনা। এদিক থেকে জ্যামিতি একটু ভিন্ন ধরণের। এর মূল আলোচ্য বস্তু নানা বস্তুর আকৃতি ও তাদের বৈশিষ্ট্য। আলোচনা পদ্ধতির কাঠামো মোটামুটি তর্কশাস্ত্র থেকে নেওয়া, আলোচনা চলে কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধকে ভিত্তি করে, রেখাচিত্রগুলিতে থাকে অবিচ্ছিন্ন বস্তুর সমাবেশ। বস্তুর আকৃতির প্রতিচ্ছবি বা প্রতিচিত্রের লেখ অবিচ্ছিন্ন ধরিয়া আলোচনা করা হয়। ত্রিকোণমিতি ও প্রাথমিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে থাকে প্রতিচ্ছবির লেখ বা তার সংশ্লিষ্ট কিছু মাপজোখকে বীজগণিতের বা পাটীগণিতের সাহায্যে আলোচনা। কাজেই সাধারণভাবে প্রথমদিকে যে গণিতের শিক্ষা দেওয়া হয় তার বিষয়বস্তু একদিকে অসম্বন্ধ পূর্ণসংখ্যা থেকে গড়ে ওঠা সংখ্যাসমষ্টি, অপর দিকে কয়েক ধরণের সহজ সরল অবিচ্ছিন্ন বস্তুর সমাবেশে দৃষ্টবস্তুদের প্রতিচ্ছবি। যেসব গণিতের শাখা সংখ্যাভিত্তিক তাদের সবারই আলোচনায় প্রধাণতঃ চারিটি মূলগত প্রক্রিয়াকে ভিত্তি করে নেওয়া।

কলনবিদ্যায় জ্যামিতির বস্তু আলোচনা করা হয় বটে, কিন্তু ইহা মূলতঃ সংখ্যাদের উপর ভিত্তি করে গড়ে তোলা হয়। তবে আগের গণিতের শাখাগুলি থেকে এর বৈশিষ্ট্য এই যে এতে মূলগত চারটি প্রক্রিয়া ছাড়া আর একটি নূতন মূলগত প্রক্রিয়াকে আলোচনায়

ভিত্তি করা হয়। এই মূলগত প্রক্রিয়াকে সীমানির্ধারণ বলে। এই সীমানির্ধারণ প্রক্রিয়া সম্পূর্ণ নূতন এবং বিশেষ যত্ন-সহকারে শিক্ষা করা উচিত। কলনবিদ্যায় আর সব বিশেষ প্রয়োজনীয় ধারণা প্রকৃতপক্ষে কোনরূপ সীমানির্ধারণের উপর নির্ভর করে। সীমানির্ধারণের ধারণা থেকে প্রথমেই আনা হয় অবিচ্ছিন্নতার ধারণা ও তার ধর্মের আলোচনা। এভাবে গড়ে ওঠে জ্যামিতির মূলতঃ অবিচ্ছিন্নতার সংখ্যাভিত্তিক বিশ্লেষণ। এই জন্যই এই বিদ্যার সঙ্গে জ্যামিতির ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ। এ সব বিষয়ের আলোচনা সাধ্যমত সহজ করে সবিস্তারে করার চেষ্টা করা হবে।

ঐতিহাসিক মন্তব্য: কলন-বিদ্যার প্রবর্তক হিসাবে নিউটন (Newton) ও লাইবনিৎসকে (Leibnitz) ধরা হয়, তবে কোন বিদ্যাই একজন বা দুজন একদিনে বসে তৈরী করেন না, ক্রমবিকাশের মধ্যেই বিদ্যা যথার্থ রূপ বা পরিপূর্ণতা লাভ করে। গণিতের আদিযুগ থেকেই কলনবিদ্যার ধারণা স্পষ্টতর হয়ে উঠেছে। আলেকজান্দ্রিয়ার গাণিতিকদের আলোচনায় কোন কোন স্থানে প্রতীক ব্যবহার না করে কলনবিদ্যার আলোচনা দেখা যায়। ভাস্করাচার্য্য ও আর্য্যভট্টের আলোচনায় কোন কোন অংশে সেরূপ বর্তমানে প্রচলিত প্রতীক ও সংজ্ঞা ব্যবহার না করে কলনবিদ্যার প্রয়োগ মনে করা যেতে পারে।

ইউরোপীয় সভ্যতার পুনর্জাগরণের (Renaissance) প্রথমদিকে স্থানাঙ্ক-জ্যামিতির আলোচনা প্রসঙ্গে ডেকার্টে (Des Cartes) যে সব আলোচনা করেন তাতে মোটামুটিভাবে অন্তরকলনবিদ্যা দেখা যায়—অবশ্য তিনিও প্রতীক বা সংজ্ঞা ব্যবহার করেন নাই। কলনবিদ্যার গোড়াপত্তনে নিউটন বলবিদ্যায় যে সব প্রতীক ব্যবহার করেন সাধারণভাবে সেই সব প্রতীক কলনবিদ্যায় গৃহীত হয় নাই।

নিরপেক্ষভাবে লাইবনিৎস কলনবিদ্যার গোড়াপত্তন করেন এবং তাঁর প্রবর্তিত প্রতীকই বর্তমানে কলনবিদ্যায় বহুল ব্যবহৃত।

অয়লার (Euler), টেলর (Taylor), ম্যাকলরিন (Maclaurin), লাগরাঞ্জ (Lagrange), ল'শপিট্যাল (L'Hospital), কসি (Cauchy), আবেল (Abel), গাউস (Gauss), ডালেমবার্ট (D'Alembert), ভাইয়ারস্টাস (Weierstrass) প্রভৃতির নাম এই প্রসঙ্গে উল্লেখ করা যেতে পারে।

আলোচনার উদ্দেশ্য, প্রণালী ও পরিধি: কলন-বিদ্যার আলোচনা ব্যতিরেকে গণিতের তথা বিজ্ঞানের আলোচনা সম্পূর্ণ করা সম্ভব নয়। তাই কলন-বিদ্যার আলোচনা একান্ত প্রয়োজন। অবশ্য এ আলোচনা শুধু বিমূর্ত ভাষায় বা জ্যামিতির সাহায্য না নিয়ে বোঝাতে গেলে পাঠকের কাছে বিষয়টি কিছু কষ্টসাধ্য হয়ে

ওঠে, সেই জন্য সাধ্যমত জ্যামিতির সঙ্গে এ বিদ্যার সম্পর্ক রেখে যতটা পারা যায় সহজ করে আলোচনার চেষ্টা করা হবে। আমাদের দেশে কলনবিদ্যার যে সব পুস্তক আছে তাতে বিষয়বস্তুকে জ্যামিতির সঙ্গে সম্পর্ক না রেখেই আলোচনা করা হয়—উদাহরণ-স্বরূপ বলা যায় ডেডিকিণ্ড (Dedekind)এর তত্ত্ব কোন পুস্তকে সোজা ভাষায় বলা হয় না, তত্ত্বটিকে জ্যামিতির ভাষায় প্রকাশ করলে খুবই সহজ হয়ে ওঠে। তাই এ পুস্তকে কলন-বিদ্যার ধারণাগুলি যতটা পারা যায় সহজভাবে বোঝাবার চেষ্টা করা হবে। সহজ ভাষায় বোঝাবার পর যদি বিষয়বস্তু বিমূর্ত ভাষায় বলা হয় তবে পাঠকদের পক্ষে তা আয়ত্ত করাও সহজসাধ্য হয়। পূর্বেই বলা হয়েছে বিজ্ঞানের বিস্তীর্ণ শাখায়, মানুষের ব্যবহারিক জীবনে বহু সমস্যার গণিতের সাহায্যে সমাধানে কলনবিদ্যার প্রচুর প্রয়োগ আছে। এই প্রয়োগের কথা সবিস্তারে বলা হবে তৃতীয় খণ্ডে।

আলোচনার বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত বিবরণ: কলন-বিদ্যার আলোচনার এই প্রথমভাগে কয়েকটি প্রারম্ভিক মূল কথার বিষয় আলোচনা করা হবে প্রথম খণ্ডে—যেমন বাস্তব সংখ্যা, বাস্তব সংখ্যার সেট, ক্রম ও শ্রেণী ; ফাংশনের ধারণা ; সেট, ক্রম ও ফাংশনের সীমাবিন্দু ; অভিসারী ও অপসারী শ্রেণী ; ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা। দ্বিতীয় খণ্ডে প্রথম ভাগের মূল বিষয়বস্তু থেকে পাওয়া অন্তরকলনের আলোচনা। তৃতীয় খণ্ডে অন্তরকলন-বিদ্যার নানারূপ প্রয়োগের আলোচনা। পরিশিষ্টাংশে বক্ররেখার প্রকৃতি আলোচনা করে অন্তরকলনবিদ্যা শেষ করা হবে।

কলন-বিদ্যা

(প্রথম ভাগ)

প্রথম খণ্ড

(প্রারম্ভিক মূলকথা)

প্রথম অধ্যায়

বাস্তব সংখ্যা

1.01 প্রাথমিক মন্তব্য

কলনবিদ্যা সংখ্যা-তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে ; তাই প্রারম্ভিক মূলকথার প্রথমে সংখ্যার আলোচনা করা দরকার। কলনবিদ্যার আলোচনায় এমন একটি সংখ্যা-গোষ্ঠী দরকার যার সাহায্যে এই বিদ্যার আলোচনায় কোনরূপ অসুবিধা না হয়, সেই সংখ্যা-গোষ্ঠীর নাম বাস্তব সংখ্যা-গোষ্ঠী। এখন এই বাস্তব সংখ্যার সংজ্ঞা দেবার আগে পাটিগণিতে বা বীজগণিতে যে সব সংখ্যার সঙ্গে আমাদের পরিচয় হয়েছে তাদের উল্লেখ করা হল।

স্বাভাবিক সংখ্যা-গোষ্ঠী ঃ বস্তু গণনার জন্য স্বাভাবিকভাবে যে সংখ্যার ব্যবহার হয় গণিতশাস্ত্রে তাহাই স্বাভাবিক (বা প্রাকৃত বা ধনাত্মক পূর্ণ ≡ natural) সংখ্যা নামে পরিচিত। যথা 1, 2, 3. 4, ⋯। এখন এই স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে দেখা দরকার কি কি প্রক্রিয়া সম্ভব অর্থাৎ কি কি প্রক্রিয়ার ফল আবার একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। যেমন সহজেই দেখা যায় যোগ বা গুণ প্রক্রিয়ার ফলে দুই বা ততোধিক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল বা গুণফল আবার একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে যদি বিয়োগ বা ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হয় তবে সবসময় ফল স্বাভাবিক সংখ্যা নাও হতে পারে। এই অসুবিধার জন্য সংখ্যগোষ্ঠীর প্রসারণ করা দরকার অর্থাৎ এমন একটি সংখ্যাগোষ্ঠী তৈরীর প্রয়োজন যার এক অংশ হবে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী এবং যার মধ্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা সম্ভবপর হবে এবং এই প্রক্রিয়াগুলির প্রয়োগের ফল সব সময়ই প্রসারিত সংখ্যা-গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত একটি সংখ্যা হবে। সংখ্যাগোষ্ঠীর প্রসারণের আগে স্বাভাবিক সংখ্যার ধর্ম সম্বন্ধে কিছু বলার আছে।

সহজেই লক্ষ্য করা যায় যে—(১) প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যার একটি অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা আছে। যেমন 1 এর অনুগামী 2, 2 এর অনুগামী 3, ইত্যাদি। কিন্তু যদি প্রশ্ন করা যায়, এই অনুগামী সংখ্যাদের শেষ কোথায় ? প্রশ্নটির উত্তর খুব সহজ নয়, তবে এখন এইটুকু বলা যায় যে এর শেষ নাই। যাই হোক এখানে বিমূর্ত

(abstract) দৃষ্টিভঙ্গির মাধ্যমে বলা যায় প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n এর একটি অনুগামী স্বাভাবিক সংখ্যা n^+ আছে ($n^+ = n+1$)।

(২) 1 কি কোন স্বাভাবিক সংখ্যার অনুগামী? ইহার উত্তর—না। তাহলে ধর্ম হিসেবে ইহা উল্লেখযোগ্য যে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে একটি সংখ্যা 1 এমন আছে যে $1 \neq a^+$, a যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হউক না কেন।

(৩) যদি $m^+ = n^+$ হয়, তবে $m = n$

(৪) যদি কোন সংখ্যাগোষ্ঠী S এমন হয় যে S এর মধ্যে 1 আছে এবং যখনই S এর মধ্যে স্বাভাবিক সংখ্যা n আছে তখনই S এর মধ্যে তাহার অনুগামী n^+ আছে, তবে S সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা গঠিত; কারণ S এর মধ্যে 1 থাকিলে 1^+ বা 2 আছে, আবার 2 থাকিলে 2^+ বা 3 আছে, ইত্যাদি। এই চতুর্থ ধর্ম গণিতশাস্ত্রে খুবই প্রয়োজনীয়—ইহা গণিতশাস্ত্রে আরোহ-নীতি (principle of mathematical induction) নামে পরিচিত। কলন-বিদ্যার যখনই কোন উপপাদ্য $n = 1, 2, 3,$ …… এর জন্য সত্য হয় তমনই তার প্রমাণের সময় এই আরোহ নীতির সাহায্য নিতে হয়।

পূর্ণ-সংখ্যাগোষ্ঠী : এখন স্বাভাবিক সংখ্যা-গোষ্ঠীর প্রসারণের কথায় আসা যাক। পূর্বেই বলা হয়েছে যে এই সংখ্যা-গোষ্ঠীর মধ্যে বিয়োগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ সম্ভবপর নয়। তাই প্রয়োজনের খাতিরে এই সংখ্যাগোষ্ঠীতে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলি

$$-1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots;\ \text{এবং } 0\ (\text{শূন্য})$$

$$\text{অথবা } -n \text{ এবং } 0$$

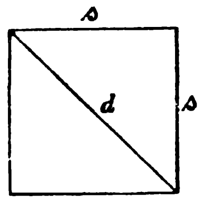
সংযোজন করা হয় (n স্বাভাবিক-সংখ্যার প্রতীক)। এই সংযোজনের ফলে সর্বত্র বিয়োগ প্রক্রিয়া সম্ভবপর হয়। এখন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাগোষ্ঠী, ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যাগোষ্ঠী এবং শূন্য মিলে নূতন সংখ্যাগোষ্ঠী (পূর্ণ বা অখণ্ড সংখ্যাগোষ্ঠী) তৈরী হল। পূর্ণ সংখ্যা-গোষ্ঠীর প্রত্যেক সংখ্যার অনুগামী আছে, আবার প্রত্যেক সংখ্যা নিজেও অনুগামী। পূর্ণ সংখ্যাগোষ্ঠীর একটি উপগোষ্ঠী (subclass বা subsystem) স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী।

'র‍্যাসানাল' (Rational) সংখ্যা : উপরোক্ত প্রসারণের ফলে ভাগ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা সম্ভবপর হল না। তাই আবার পূর্ণ সংখাগোষ্ঠীর পুনঃ প্রসারণের প্রয়োজন হল। এই প্রয়োজনের খাতিরে যে নবগঠিত সংখ্যার আবির্ভাব হল তার নাম 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সংজ্ঞা নিম্নরূপে দেওয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ অনুপাত আকারে লেখা যায়, p একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বা শূন্য, q একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা (কিন্তু শূন্য নয়) এবং p ও q পরস্পর মৌলিক, তাকে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা বলে।

যথা $3=\frac{3}{1}$, $-5=\frac{-5}{1}$, $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$, ইত্যাদি।

বাস্তব সংখ্যা : এখন দেখা যাক উপরোক্ত প্রসারিত সংখ্যাগোষ্ঠী কলনবিদ্যার পক্ষে যথেষ্ট হল কিনা অর্থাৎ পুরোপুরিভাবে এই প্রসারিত সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে থেকে গণিতের কোন প্রক্রিয়া প্রয়োগ করলে ফল কি এই সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে থাকবে ? গ্রীক দার্শনিক পীথাগোরাসের সুপরিচিত সঙ্কট থেকে আমরা লক্ষ্য করতে পারি যে s পরিমাণ দৈর্ঘ্যের একটি বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য যদি d হয়, তবে



$$d^2=s^2+s^2=2s^2$$

মনে করি $r=\frac{d}{s}$, তাহলে

$$d^2=(rs)^2$$

এখন $$r^2s^2=2s^2$$

$$\therefore\quad r^2=2$$

পীথাগোরাস r কে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যারূপে প্রকাশ করতে পারেন নাই অর্থাৎ r 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নয়। তাহলে দৈর্ঘ্যমাপেই এমন সংখ্যা আছে যা 'র‍্যাসানাল' (rational) নয়, এর নাম দেওয়া হয় 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যা। তাই 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীরও প্রসারণ দরকার। কিন্তু সমস্ত 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যার সাধারণ তত্ত্ব খুব সহজ নয়। এর জন্য দুজন বিশ্ববিখ্যাত গণিতজ্ঞের—একজনের নাম ডেডিকিণ্ড, অপর জনের নাম ক্যাণ্টর—তত্ত্বের আলোচনা দরকার। ডেডিকিণ্ডের 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যার তত্ত্বে সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা একটি সরলরেখায় প্রদর্শন করে একটি বিশেষ সংখ্যাকে ঐ সরল-রেখার ছেদ বা বিভাগ হিসাবে দেখা হয়। কিন্তু ক্যাণ্টরের 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational)

সংখ্যার তত্ত্ব সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার ক্রমের (sequence) উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। ক্যাণ্টরের তত্ত্বে সংখ্যার দশমিকের মানের সহায্যে সহজে আলোচনা করা যায়, এখানে সেভাবেই আলোচনা করা হবে। আর ডেডিকিণ্ডের তত্ত্ব জ্যামিতির ধারণা পিছনে রেখে যতটা সহজ করে পারা যায় আলোচনা করা হবে। সমস্ত 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যার নিরূপণের পর আমরা 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর সঙ্গে 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যাদের সংযোজন করে যে নূতন সংখ্যাগোষ্ঠী পাই তাহাই বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠী। বর্তমান কলন-বিদ্যার আলোচনায় এই সংখ্যাগোষ্ঠী স্বয়ং সম্পূর্ণ অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠীর আর প্রসারণ না করেই কলনবিদ্যার আলাচনা করা যেতে পারে। বাস্তব সংখ্যায় অনুগামীর ধারণা সরাসরি নেই।

মূলদ বাস্তব ও অমূলদ বাস্তব সংখ্যা : বাস্তব সংখ্যাদের আবার অপর দিক থেকে দুই শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। যে সব সংখ্যা কোন না কোন বীজগাণিতিক সমীকরণের মূল হিসাবে পাওয়া যায় তাদের মূলদ (algebraic) সংখ্যা বলা হয়। প্রত্যেক 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা বাস্তব মূলদ। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{\overline{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{7}}$, প্রভৃতি সংখ্যা যাদের করণীর সাহায্যে লেখা যায় তারা সবাই মূলদ বাস্তব। কিন্তু ত্রিকোণমিতির কৌণিক মাপে ব্যবহৃত 'π', বীজগণিতে আলোচিত 'e' প্রভৃতির মত অনেক সংখ্যা আছে যারা মূলদ নয় অর্থাৎ ইহারা অমূলদ (non-algebraic বা transcendental)। দুর্ভাগ্যবশতঃ সাধাবণতঃ বাস্তবসংখ্যার বাংলা আলোচনাতে প্রায় সব পুস্তকে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাকে মূলদ ও 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) সংখ্যাকে অমূলদ হিসাবে উল্লেখ করা হয়। ইহা ভ্রান্তি প্রসূত। প্রত্যেক 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাই মূলদ, কিন্তু প্রত্যেক মূলদই 'র‍্যাসানাল' (rational) নয়—কখনও কখনও 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) হতে পারে। অমূলদ সংখ্যা কখনই

বিশেষ দ্রষ্টব্য : বর্তমান পুস্তকের লেখক হিসেবে আমরা Rational এবং Irrational কথা দুটির প্রচলিত পরিভাষা যথাক্রমে মূলদ এবং অমূলদ গ্রহণ করতে না পারাব জন্য দুঃখিত ; কারণ Rational এবং Algebraic irrational সংখ্যা বীজগাণিতিক সমীকরণের মূল হিসেবে পাওয়া যায় বলে মূলদ এবং non-algebraic irrational অমূলদ। সুতরাং আমাদের মতে Rational এবং Irrational এর পরিভাষা মূলদ এবং অমূলদ ত্রুটিপূর্ণ। আবার Rational কথাটি Latin শব্দ rationalis < ratio থেকে এসেছে, কিন্তু Latin শব্দ ratio কথার অর্থ reason ; তাই পরিভাষা হিসেবে Rational এর পরিভাষা যৌক্তিক এবং Irrational এর পরিভাষা অযৌক্তিক করা হয়েছিল। দুর্ভাগ্যবশতঃ গণিত বিদ্যা সমিতির এই পরিভাষা দুটিতে আপত্তি থাকায় আমরা 'র‍্যাসানাল' এবং 'ইরর‍্যাসানাল' ইংরাজী কথা দুটি পুস্তকে রাখতে বাধ্য হয়েছি।

'র‍্যাসানাল' (rational) হতে পারে না, কিন্তু 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা কখন মূলদ কখন অমূলদ হতে পারে।

1.02 স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী (System of natural numbers)

প্রাথমিক মন্তব্যে স্বাভাবিক সংখ্যার সংজ্ঞা এবং ধর্ম সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা হয়েছে। এখন স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে কিছু বীজগাণিতিক ধর্মের আলোচনা করা হবে। সাধারণ পাঠক বর্তমান পাঠ্যসূচি-বহির্ভূত এই বীজগাণিতিক ধর্মের আলোচনা বাদ দিয়া পাঠাভ্যাস করতে পারেন—সেজন্য এই অংশটুকু **সামান্য ছোট হরফে** দেওয়া হল।

স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীকে যদি N দ্বারা সূচিত করা হয় তবে a যদি একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তাহলে লেখা হবে $a \in N$, অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা 'a' N এতে আছে। এখন যোগ (+) ও গুণ (.) প্রক্রিয়া সম্বন্ধে সাধারণ জ্ঞান থেকে আমরা লিখতে পারি

(1) $a+b \in N$, যখন $a \in N, b \in N$
(2) $a \cdot b \in N$, যখন $a \in N, b \in N$
} অবস্থিতি-নিয়ম (Law of closure or stability)

(3) $a+(b+c)=(a+b)+c$, যখন $a \in N, b \in N, c \in N$
(4) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ „ „ „ „
} সংযোগ নিয়ম (associative law)

(5) $a+b=b+a$
(6) $a \cdot b=b \cdot a$
} বিনিময় নিয়ম (commutative law)

(7) $a \cdot (b+c)= a \cdot b+a \cdot c$ বিচ্ছেদ-নিয়ম (distributive law)

আধুনিক বীজগণিতে যে গোষ্ঠীতে (1) নং নিয়ম সিদ্ধ, সেই গোষ্ঠিকে যোগের গ্রুপতন্ত্র (additive groupoid) বলে। অনুরূপভাবে যে গোষ্ঠিতে (2) নং নিয়ম সিদ্ধ, সেই গোষ্ঠীকে গুণের গ্রুপতন্ত্র (multiplicative groupoid) বলে। আবার যে গোষ্ঠীতে (1) এবং (3) সিদ্ধ, তাকে যোগের অর্ধগ্রুপ (additive semigroup) বলে। অনুরূপভাবে গুণের অর্ধগ্রুপ ব্যাখ্যা করা যেতে পারে। বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আবেল (Abel) যে গ্রুপ আলোচনা করেন. তাতে বিনিময় নিয়ম সিদ্ধ বলে ধরে নেওয়া হয়েছিল, তাঁর নামানুসারে যে গ্রুপে (বা গ্রুপতন্ত্রে বা অর্ধগ্রুপে) বিনিময়-নিয়ম সিদ্ধ তাকে আবেলীয় গ্রুপ (বা আবেলীয় গ্রুপতন্ত্র বা আবেলীয় অর্ধগ্রুপ) বলে। তাহলে দেখা যায় আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী একটি যোগের আবেলীয় অর্ধগ্রুপ এবং একটি গুণের আবেলীয় অর্ধগ্রুপ, যেখানে বিচ্ছেদ-নিয়মও সিদ্ধ।

অন্যদিকে লক্ষ্য করা উচিত যে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী অসম্বদ্ধ (discrete), কারণ প্রতি দুইটি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য 'র‍্যাসানাল'(rational) বা 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা বলা যায়। আবার দুইটি স্বাভাবিক-সংখ্যার

মধ্যে কে বড় কে ছোট এই ধারণা থেকেই আসে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর ক্রম-সম্পর্ক (order relation)। যেমন a এবং b দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যা হইলে $a < b$ অথবা $b < a$ হইবেই, যখন a, b এর সমান তখনই কেবলমাত্র $a = b$। এখন '$<$' (অথবা '$>$') চিহ্নটি স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর ক্রম-চিহ্ন হিসাবে নেওয়া যেতে পারে। তাহলে আমরা দেখি যে, যদি $a, b \in N$, তবে নিম্নলিখিত যে কোন একটি সম্বন্ধ সিদ্ধ হইবেই :

$$a = b, \ a < b, \ b < a ;$$

গণিতশাস্ত্রে ইহাই ত্রিভাগ বা ত্রিবিকল্প-নিয়ম (trichotomy law) নামে সুপরিচিত।

পরিশেষে ইহা লক্ষ্য করার বিষয় যে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী N এর একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা আছে—যথা 1 ; আবার S যদি স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর একটি উপগোষ্ঠী হয় তবে S এর মধ্যেও একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা থাকবে—স্বাভাবিক সংখ্যা-গোষ্ঠীর এই ধর্মটিকে নিম্নলিখিত ভাষায় প্রকাশ করা হয় :

'N একটি সুক্রমিক (well ordered) গোষ্ঠী', উহাই গণিতশাস্ত্রে দ্বিতীয় আরোহ-নীতির (second principle of mathematical induction) মূল সূত্র।

যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া এবং ক্রম-সম্পর্ক সমেত স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী গণিতশাস্ত্রে স্বাভাবিক সংখ্যার বীজগাণিতিক গোষ্ঠী হিসাবে পরিচিত। কিন্তু প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে স্বাভাবিক সংখ্যার এই বীজগাণিতিক গোষ্ঠী যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া ছাড়া অন্য প্রক্রিয়ায় স্বয়ংসম্পূর্ণ নয় বলে এই গোষ্ঠীর প্রসারণ করা প্রয়োজন।

1.03 পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠী (System of integers)

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর প্রসারণের জন্য নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলি

$$-1, \ -2, \ -3, \ \cdots, \text{ এবং } 0 \text{ (শূন্য)}$$

স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠীর সহিত সংযোজন করা হয়। এখন যদি এই নবনির্মিত পূর্ণসংখ্যা-গোষ্ঠীকে I দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে যেহেতু স্বাভাবিক সংখ্যাগোষ্ঠী নবনির্মিত পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠীর একটি উপগোষ্ঠী, সহজেই বুঝা যায় I একটি প্রসারিত সংখ্যাগোষ্ঠী।

এখন এই প্রসারিত সংখ্যাগোষ্ঠীর ক্ষেত্রে উপরোক্ত সাতটি বীজগাণিতিক (অনুচ্ছেদ 1.02 এর (1) থেকে (7)) নিয়ম সিদ্ধ। তা ছাড়া নিম্নলিখিত আর কতকগুলি নিয়ম সিদ্ধ হয় :

(8) $a + 0 = a, \ a \in I$ (যোগের অদ্বিতীয় একক)

(9) $a + (-a) = 0, \ a \in I$ (যোগের বিলোমের অস্তিত্ব)

(10) $a \, . \, 1 = a, \ a \in I$ (গুণের অদ্বিতীয় একক)

আধুনিক বীজগণিতের ভাষায় বলা যায় পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠী একটি যোগের আবেলীয় গ্রুপ (additive abelian group) এবং গুণের আবেলীয় অর্ধগ্রুপ (multiplicative abelian semigroup), যেখানে বিচ্ছেদ-নিয়মও সিদ্ধ। এক কথায় ইহাকে বলা হয় আবেলীয় বলয় (abelian বা commutative ring)। আরও লক্ষ্য করা যায়—যদি a ও b দুইটি পূর্ণসংখ্যা হয় তবে $a \,.\, b=0$ হইলে $a=0$ অথবা $b=0$ অথবা $a=b=0$ হইবেই।

ঠিক পূর্বের মত এই সংখ্যাগোষ্ঠীতে ক্রম-সম্পর্ক আলোচনা করা যেতে পারে। এখানে ত্রিভাগ-নিয়ম থেকে আমরা পাই

$$a=0, \quad a>0, \quad a<0\,; \quad a \in I.$$

পরিশেষে লক্ষ্য করা উচিত যে পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠীও একটি অসম্বদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন গোষ্ঠী।

1.04 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠী (System of rational numbers)

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ প্রক্রিয়া সম্ভব, কিন্তু ভাগপ্রক্রিয়া সম্ভবপর নয়, কারণ ভাগপ্রক্রিয়ার প্রয়োগে ফল পূর্ণসংখ্যা-গোষ্ঠীর একটি সংখ্যা নাও হতে পারে। সেজন্য পূর্ণসংখ্যাগোষ্ঠীর প্রসারণ করে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠী তৈরী করা হল। এখন র‍্যাসানাল সংখ্যা বলতে আমরা বুঝব p/q ধরণের একটি সংখ্যা, যেখানে p একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা শূন্য, q একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (কিন্তু শূন্য নয়) এবং p ও q পরস্পর মৌলিক। এই সংজ্ঞা থেকে আমরা দেখি যে সকল পূর্ণসংখ্যা 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা, কিন্তু সকল 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা নয়।

প্রথমে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর কিছু বীজগাণিতিক ধর্মের কথা উল্লেখ করা হবে। এই সংখ্যাগোষ্ঠী যোগের একটি আবেলীয় গ্রুপ (additive abelian group) এবং শূন্য বাদে সকল 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা গুণের একটি আবেলীয় গ্রুপ (multiplicative abelian group) এবং বিচ্ছেদ-নিয়মও বলবৎ। ত'হলে গুণের ক্ষেত্রে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর (R এর) আবেলীয় অর্ধগ্রুপের ধর্মগুলি ছাড়া নিম্নলিখিত ধর্মগুলি লক্ষণীয়:

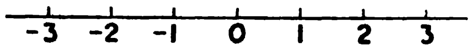
(i) $a \,.\, 1=a, \; a \in R$ (গুণসংক্রান্ত একক)

(ii) $a \,.\, a^{-1}=1, \; a\,(\neq 0) \in R$ (গুণসংক্রান্ত বিলোমের অস্তিত্ব)

বীজগণিতের ভাষায় 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীকে এক কথায় বলা হয় একটি ক্ষেত্র (field)।

এখন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর জ্যামিতিক প্রতিরূপ (geometrical representation) সম্বন্ধে আলোচনা করা দরকার। একটি সরলরেখার উপর একটি স্থির মূলবিন্দু (0) ধরা হল। মূলবিন্দুর ডানদিকে যে কোন দূরত্বকে একক ধরে সমান

সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে 1, 2, 3, ··· চিহ্নিত করা হল। মূলবিন্দুর বামদিকে সমান সমান ঐ দূরত্ব নিয়ে -1, -2, -3, ··· চিহ্নিত করা হল। এখন মনে কর p/q একটি স্থির 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। এই সরলরেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যকে q সংখ্যক



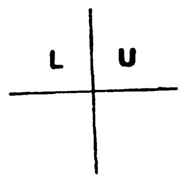
সমান অংশে ভাগ করলে p/q 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাটিকে ঐ সরলরেখার উপর একটি বিন্দুর (Q) দ্বারা চিহ্নিত করা যেতে পারে যদি $OQ = p \cdot 1/q$ হয়। এইভাবে একটি সরলরেখার উপর সকল 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার একটি জ্যামিতিক প্রতিরূপ কল্পনা করা সম্ভব। কিন্তু একটি সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দু কি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা হবে? পীথাগোরাসের সুপরিচিত সঙ্কটের কথা প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে। অতএব ইহা স্পষ্ট দেখা যায় দৈর্ঘ্যমাপের এমন সংখ্যা আছে যা 'র‍্যাসানাল' (rational) নয়। তাহলে যদি একটি সরলরেখাকে কোন বিন্দুতে কাটিয়া ফেলা হয়, তবে সেই কর্তিত বিন্দুটির দুইরকম অবস্থা হতে পারে—যথা: বিন্দুটি একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার প্রতিরূপ হতে পারে অথবা বিন্দুটি একটি 'ইররাসানাল' (irrational), যাহা 'র‍্যাসানাল' (rational) নহে, সংখ্যার প্রতিরূপ হতে পারে। এখন সরলরেখার দুইটি ভাগের প্রত্যেকটিতে অসংখ্য 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা আছে—বামদিকের ভাগটিকে যদি L দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ডানদিকেরটিকে যদি U দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে সহজেই দেখা যায় যে

(১) যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা হয় L তে আছে, না হয় U তে আছে, তা না হয় ছেদবিন্দুর (কর্তিত বিন্দুর) উপরে আছে। যদি ছেদবিন্দুর উপরে থাকে, সুবিধামত আমরা সেই বিন্দুটিকে যে কোন একটি ভাগে রাখতে পারি এবং তখন আমরা বলতে পারি যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা L তে আছে বা U তে আছে।

(২) L এর যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা U এর যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার চেয়ে ক্ষুদ্রতর। উপরোক্ত দুটি ধর্ম ডেডিকিণ্ডের 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর বিভাগের বিশেষত্ব। এই দুইটি ধর্মের মধ্যে দ্বিতীয় ধর্ম হতে সহজেই বুঝা যায় যে L বা U কোনটিই খালি (empty) হতে পারে না। এখন L কে নিম্নতরগোষ্ঠী (বা নিম্নতরবর্গ ≡ Lower class) এবং U কে উচ্চতর-

গোষ্ঠী (বা উচ্চতরবর্গ ≡ Upper class) বলা হয়। বিভাগটিকে চিহ্নিত করা হয় (L, U) দ্বারা।

৮ **সংজ্ঞা ঃ** সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার একটি বিভাগকে (L, U) **ডেডিকিণ্ডের বিভাগ** বলা হবে যদি নিম্নলিখিত দুইটি সর্ত সিদ্ধ হয় ঃ



(১) যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা L তে আছে বা U তে আছে ;

(২) L এর যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা U এর যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার চেয়ে ক্ষুদ্রতর।

এখন আলোচনা করা হবে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাসমূহের ডেডিকিণ্ড বিভাগ কয় প্রকারের হতে পারে। মনে কর p/q যে কোন একটি স্থির 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। এখন L এতে রাখা হল সেই সব 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা যারা $\leqslant p/q$ এবং U তে রাখা হল সেই সব 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা যারা $> p/q$। সহজেই অনুমান করা যায় ইহা একটি ডেডিকিণ্ডের বিভাগ, কারণ ডেডিকিণ্ডের বিভাগের দুইটি ধর্মই বিদ্যমান।

আবার মনে কর r/s যে কোন একটি স্থির 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। এখন L এতে রাখা হল সেই সব 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা যারা $< r/s$ এবং U তে রাখা হল সেই সব 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা যারা $\geqslant r/s$। তাহলে এই (L, U) একটি ডেডিকিণ্ডের বিভাগ।

উপরোক্ত দুইটি ডেডিকিণ্ডের বিভাগের পার্থক্য হল প্রথমটিতে L এতে একটি চরম 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা আছে এবং U এতে কোন অবম 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই ; কিন্তু দ্বিতীয়টিতে L এতে কোন চরম সংখ্যা নাই এবং U এতে একটি অবম সংখ্যা আছে। তাহলে কি এখন একটি ডেডিকিণ্ড বিভাগ আছে যেখানে L এতে একটি চরম সংখ্যা আছে এবং U এতে একটি অবম সংখ্যাও আছে। ইহা অসম্ভব। কারণ, যদি সম্ভব হয় ; তবে এরূপ একটি ডেডিকিণ্ড বিভাগ

ধরা হল। তাহলে মনে কর L এর চরম সংখ্যাটি l এবং U এর অবম সংখ্যাটি u ; অতএব $l < u$; এখন লক্ষ্য কর

$$l < v = \frac{1}{2}(l+u) < u$$

তাহলে $v = \frac{1}{2}(l+u)$ সংখ্যাটি 'র‍্যাসানাল' (rational) বটেই, কিন্তু ইহা l এর চেয় বড় বলে L এতে থাকতে পারে না, আবার ইহা u এর চেয়ে ছোট বলে U এতে থাকতে পারে না। অতএব v (rational) সংখ্যাটি L এতে নাই এবং U এতেও নাই, সুতরাং ডেডিকিণ্ডের বিভাগের (২) নং ধর্ম অবিদ্যমান। অতএব (L, U) বিভাগটি ডেডিকিণ্ডের বিভাগ হতে পারে না।

এখন উপরোক্ত দুরকম ডেডিকিণ্ডের বিভাগ ছাড়া আর একটি বিভাগ কিছুক্ষণ আগেই উল্লেখ করা হয়েছে, যথা : একটি সরলরেখাকে এমন একটি বিন্দুতে কেটে ফেলা হল যখন কর্তিত বিন্দুটি একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার প্রতিরূপ নয়—প্রতিটি এরূপ ডেডিকিণ্ডের বিভাগে লক্ষ্যণীয় বিষয় হল যে L গোষ্ঠীতে কোন চরম 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই এবং U গোষ্ঠীতে কোন অবম 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই ; এরূপ প্রত্যেকটি বিভাগ থেকেই এক একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার উৎপত্তি—ইহাই ডেডিকিণ্ডের 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যর তত্ত্ব। 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীও একটি অসম্বদ্ধ গোষ্ঠী।

1.05 'ইররাসানাল' (Irrational) সংখ্যা

'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার অস্তিত্বের উদাহরণ হিসাবে আমরা নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সমাধান করব :

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর যে $\sqrt{2}$ 'র‍্যাসানাল' (Rational) সংখ্যা নয়।

সমাধান : যদি সম্ভব হয়, মনে করি $\sqrt{2}$ একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। সুতরাং 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সংজ্ঞা থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং পরস্পর মৌলিক।

$$\therefore \quad p^2 = 2q^2 \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন স্পষ্টতঃ দেখা যায় $2q^2$ একটি যুগ্ম সংখ্যা, তাহলে p^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা।

যেহেতু কেবল যুগ্ম সংখ্যার বর্গ একটি যুগ্ম সংখ্যা, সেহেতু p একটি যুগ্ম সংখ্যা। তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$p = 2m \quad \cdots \quad (2)$$

এখন (1) এবং (2) হতে আমরা পাই

$$4m^2 = 2q^2$$

$$\text{অথবা} \quad q^2 = 2m^2$$

পূর্বের মত যুক্তির দ্বারা আমরা দেখাতে পারি যে q একটি যুগ্ম সংখ্যা। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$q = 2n \quad \cdots \quad (3)$$

(2) এবং (3) হতে প্রতীয়মান হয় যে p এবং q পরস্পর মৌলিক নয়, কিন্তু ইহা কল্পনা-বিরুদ্ধ। এই কল্পনা-বিরুদ্ধ ফল পাওয়া গেল আমাদের ভ্রান্ত অনুমানের জন্য। অতএব আমাদের অনুমান (অর্থাৎ $\sqrt{2}$ একটি যৌক্তিক সংখ্যা) ঠিক নয়। সুতরাং $\sqrt{2}$ 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নয়।

উদাহরণ 2 প্রমাণ কর যে $\sqrt{3}$ 'র‍্যাসানাল' (Rational) সংখ্যা নয়।

সমাধান : প্রথমে আমরা লক্ষ্য করি

$$1^2 < 3 < 2^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

এখন যদি সম্ভব হয়, মনে করি $\sqrt{3}$ একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\text{অথবা} \quad 3 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\therefore \quad 1^2 < \frac{p^2}{q^2} < 2^2$$

$$\text{অথবা} \quad 1 < \frac{p}{q} < 2 \quad \text{যেহেতু } \frac{p}{q} \text{ ধনাত্মক}$$

$$\text{অথবা} \quad q < p < 2q$$

$$\text{অথবা} \quad 0 < p - q < q \quad \cdots\cdots(3)$$

এখন আমরা দেখাতে পারি যে যখনই $p^2 = 3q^2$, তখনই নিম্নলিখিত অভেদ সিদ্ধ হবে :

$$(3q - p)^2 = 3(p - q)^2$$

কারণ

$$(3q-p)^2-3(p-q)^2$$
$$=2(3q^2-p^2)=2.0=0$$

তাহলে লক্ষ্য করি যে $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ হইলেই $\sqrt{3}=\frac{3q-p}{p-q}$ হইবেই।

$$\therefore \quad \frac{p}{q}=\frac{3q-p}{p-q}$$

যেহেতু p ও q পরস্পর মৌলিক, p ও q এর মধ্যে 1 ছাড়া কোন উৎপাদক নেই। অতএব

$$p-q>q \qquad \cdots\cdots(4)$$

স্পষ্টতঃই (3) এবং (4) পরস্পর-বিরুদ্ধ। অতএব আমাদের অনুমান ($\sqrt{3}$ একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা) মিথ্যা।

$\therefore$ $\sqrt{3}$ একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নয়।

অনুশীলনী ঃ যদি m একটি অ-পূর্ণবর্গ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে $\sqrt{m}$ একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নয়।

সঙ্কেত ঃ—দ্বিতীয় উদাহরণের মত।

উপরোক্ত উদাহরণ সাহায্যে 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার অস্তিত্ব দেখানো হল। এখন ডেডিকিণ্ডের এবং ক্যাণ্টরের তত্ত্বের সাহায্যে 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার অস্তিত্ব সহজে আলোচনা করা হবে।

ডেডিকিণ্ডের তত্ত্ব ঃ পূর্বের অনুচ্ছেদে বলা হয়েছে যে, সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাকে একটি সরলরেখায় প্রদর্শন করে সরলরেখাকে যদি দুই অংশে ভাগ করা হয় তবে একটি বিশেষ ক্ষেত্রে সরলরেখার ছেদবিন্দুটি একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার প্রতিরূপ হতে পারে। এই ধারণার ভিত্তি করে ডেডিকিণ্ডের 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার তত্ত্ব গড়ে উঠেছে। শূন্য সমেত সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা গোষ্ঠীকে দুভাগে এমন ভাবে ভাগ করা হল যে

1) প্রত্যেকটি র‍্যাসানাল যৌক্তিক সংখ্যা L কিংবা R গোষ্ঠীভুক্ত

2) L গোষ্ঠীর যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা R গোষ্ঠীর প্রতিটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর

3) L গোষ্ঠীতে কোন চরম (বৃহত্তম) 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই এবং R গোষ্ঠীতে কোন অবম (ক্ষুদ্রতম) 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই :

তাহলে এমন কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা নাই যা L এর প্রত্যেকটি সংখ্যা থেকে বৃহত্তর এবং R এর প্রত্যেকটি সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর। এরূপ প্রত্যেক ডেডিকিণ্ডের বিভাগের সঙ্গে একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার অস্তিত্ব বিদ্যমান, যেখানে এই 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যাটি L এর প্রত্যেকটি সংখ্যা থেকে বৃহত্তর এবং R এর প্রত্যেকটি সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর। এই জাতীয় প্রত্যেকটি বিভাগ থেকেই একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার উৎপত্তি। এরূপ সমস্ত ডেডিকিণ্ডের বিভাগ নিলে সমস্ত 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা পাওয়া যাবে।

ক্যাণ্টরের তত্ত্ব : আমরা জানি যে কোন 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাকে যদি দশমিকে প্রকাশ করা হয় তবে সেই দশমিক সসীম বা আবৃত্ত (পৌনঃপুনিক) হয়। অর্থাৎ যে কোন সসীম বা আবৃত্ত দশমিকের মান একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা। যেমন

$$1{\cdot}732=\frac{1732}{1000}, \quad {\cdot}1\dot{6}=\tfrac{1}{6}, \quad {\cdot}\dot{1}4285\dot{7}=\tfrac{1}{7}\cdots\cdots.$$

অবশ্য এক্ষেত্রে একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার দুইরকম দশমিক প্রকাশের সম্ভাবনা থাকে। যথা $1=1{\cdot}00\cdots={\cdot}\dot{9}$। এক্ষেত্রে যদি অনন্ত 9 দ্বারা দশমিক প্রকাশকে অগ্রাহ্য করি তবে প্রত্যেক 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার একটি মাত্র দশমিক প্রকাশ থাকে। এখন এমন যদি একটি দশমিক প্রকাশ হয় যা সসীম বা আবৃত্ত নয়, সেই দশমিকের মান 'র‍্যাসানাল' (rational) হতে পারে না। যেমন

$$1{\cdot}414213\cdots, \quad 3{\cdot}14159\cdots,$$

তাহলে দেখা যায় 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা ছাড়া এমন সংখ্যার অস্তিত্ব আছে।

পূর্বে লক্ষ্য করা হয়েছে $\sqrt{2}$ একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা। এখন $\sqrt{2}$ এর দশমিক প্রকাশ কি রকম হয় আলোচনা করা যাক। দশমিক প্রকাশ করার পদ্ধতিটি নিম্নে সংক্ষেপে দেওয়া হল ঃ

মনে কর $x(<1)$ সংখ্যাটির দশমিক প্রকাশ বাহির করতে হবে। এখন ধর $x=p_1$ এবং $d_1=[10p_1]$, '[ ]' চিহ্নটির দ্বারা আমরা বুঝি $10p_1$ এর মধ্যে সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা যতটা আছে।

এখন যদি $d_1=10p_1$ হয়, তাহলে দশমিক প্রকাশ এখানে শেষ।
যদি $d_1\neq 10p_1$ হয়, তাহলে ধর $p_2=10p_1-d_1$ এবং $d_2=[10p_2]$
এখন যদি $d_2=10p_2$ হয়, তাহলে দশমিক প্রকাশ এখানে শেষ।

যদি $d_2 \neq 10p_2$ হয়, তাহলে আবার ধর $p_3 = 10p_2 - d_2$ এবং $d_3 = [10p_3]$. এইভাবে বার বার প্রয়োগের ফলে x সংখ্যাটির দশমিক প্রকাশের অঙ্কগুলি যথা $d_1, d_2, \cdots$ বাহির করা যায়।

উদাহরণ। ধরা যাক $x = \frac{3}{40}$

মনে করা যাক $p_1 = \frac{3}{40}$

$\therefore\ d_1 = [10p_1] = [\frac{30}{40}] = 0 < 10p_1$

তাহলে $d_1 \neq 10p_1$

আবার ধরা যাক $p_2 = 10p_1 - d_1 = \frac{30}{40} - 0$

$\therefore\ d_2 = [10p_2] = [\frac{30}{4}] = 7 < 10p_2$

যেহেতু $d_2 \neq 10p_2$, আবার ধরা যাক $p_3 = 10p_2 - d_2 = \frac{30}{4} - 7 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ d_3 = [10p_3] = [5] = 5$

যেহেতু $d_3 = 10p_3$, দশমিক প্রকাশের পদ্ধতিটি এখানে শেষ হচ্ছে এবং আমরা পাই

$$\frac{3}{40} = \cdot 07500\cdots = \frac{0}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$

উদাহরণ 2 ধর $x = \frac{1}{6}$

মনে কর $p_1 = \frac{1}{6}$

$\therefore\ d_1 = [10p_1] = [\frac{5}{3}] = 1 < 10p_1$

তাহলে $d_1 \neq 10p_1$

আবার ধর $p_2 = 10p_1 - d_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$\therefore\ d_2 = [10p_2] = [\frac{20}{3}] = 6 < 10p_2$

যেহেতু $d_2 \neq 10p_2$, আবার ধর $p_3 = 10p_2 - d_2 = \frac{20}{3} - 6 = \frac{2}{3}$

$\therefore\ d_3 = [10p_3] = [\frac{20}{3}] = 6 < 10p_3$

অতএব দেখা যায় পদ্ধতি বার বার প্রয়োগ করলে দশমিক প্রকাশের শেষ হয় না এবং বার বার 6 আসে। সুতরাং $\frac{1}{6}$ এর দশমিক প্রকাশ একটি আবৃত্ত দশমিক।

$\therefore\ \frac{1}{6} = \cdot 1666\cdots$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \cdots$$

উদাহরণ 3 ধর $x = \sqrt{2} = 10.\ \frac{\sqrt{2}}{10}$

মনে কর $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\therefore\ d_1 = [10p_1] = [\sqrt{2}] = 1$

যেহেতু $d_1 \neq 10p_1$, ধর $p_2 = 10p_1 - d_1 = \sqrt{2} - 1$

$\therefore\ d_2 = [10p_2] = [10\sqrt{2} - 10] = [10\sqrt{2}] - 10$

সহজেই দেখা যায় $14^2 < (10\sqrt{2})^2 < 15^2$ অর্থাৎ $[10\sqrt{2}] = 14$

$\therefore\ d_2 = 14 - 10 = 4$

ধর $p_3 = 10p_2 - d_2 = 10\sqrt{2} - 10 - 4 = 10\sqrt{2} - 14$

$\therefore\ d_3 = [10p_3] = [100\sqrt{2} - 140] = [100\sqrt{2}] - 140$

এখন $[100\sqrt{2}] - 141$

$\therefore\ d_3 = 141 - 140 = 1$

এইভাবে পদ্ধতি বার বার প্রয়োগ করলে দেখা যায় দশমিক প্রকাশের কোথাও শেষ নাই, উপরন্তু আবৃত্ত দশমিকের আশা নেই। $\sqrt{2}$ এর দশমিক প্রকাশ সসীম নয় আবার আবৃত্ত নয় ; $\sqrt{2}$ একটি অপৌনঃপুনিক দশমিক।

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\cdots$$

$$= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \cdots$$

দশমিক সংখ্যার সাহায্যে ক্যাণ্টরের তত্ত্ব সহজভাবে আলোচনা করতে হলে বলতে হয় যে সকল দশমিক সংখ্যার মান 'র‍্যাসানাল' (rational) নয় অর্থাৎ যখন দশমিক সসীম বা আবৃত্ত তখন তার মান 'র‍্যাসানাল (rational), কিন্তু যখন দশমিক অনন্ত এবং অপৌনঃপুনিক তখন তার মান 'ইররাসানাল' (irrational)।

সংজ্ঞা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ অনুপাতে লেখা সম্ভব নয় অথবা যে সংখ্যার দশমিক প্রকাশ সসীম বা আবৃত্ত নয় (অথবা যে সংখ্যার দশমিক প্রকাশ অনন্ত এবং অপৌনঃপুনিক) তাকে 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা বলে।

1.06 বাস্তব সংখ্যা (Real number)

সকল 'র‍্যাসানাল' (rational) এবং 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার দ্বারা গঠিত যে সংখ্যাগোষ্ঠী তাহাই বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠী। অতএব বাস্তব সংখ্যা বলতে আমরা বুঝি একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) বা 'ইররাসানাল (irrational) সংখ্যা।

প্রথমে বাস্তবসংখ্যাগোষ্ঠীর কিছু বীজগাণিতিক ধর্মের কথা উল্লেখ করা হবে। এই সংখ্যাগোষ্ঠী যোগের একটি আবেলীয় গ্রূপ (additive abelian group) এবং শূন্য বাদে সকল বাস্তব সংখ্যা গুণের একটি আবেলীয় গ্রূপ (multiplicative abelian group) এবং এই গোষ্ঠীতে বিচ্ছেদ-নিয়ম বলবৎ। বীজগণিতের ভাষায় বাস্তব সংখ্যা গোষ্ঠীকে বলা হয় একটি ক্ষেত্র (field)। এই সংখ্যাগোষ্ঠীতে নিম্নলিখিত ক্রম সম্পর্ক (order relation) বিদ্যমান :

ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠী (P) এর মধ্যে আমরা দেখি

(1) $x \in P,\ y \in P$ হইলে $x+y \in P$

(2) $x \in P,\ y \in P$ হইলে $x \cdot y \in P$

(3) $x \in P$ হইলে $-x \notin P$ (অর্থাৎ $-x$ সংখ্যাটি P তে নাই)

(4) $x \in R$ হইলে $x=0$ অথবা $x \in P$ অথবা $-x \in P$

(R সূচিত করে বাস্তবসংখ্যাগোষ্ঠী)

উপরন্তু বাস্তবসংখ্যার যে কোন একটি উপগোষ্ঠীর একটি উচ্চপ্রান্ত (upper bound) থাকলে একটি ক্ষুদ্রতম উচ্চপ্রান্ত (least upper bound) থাকবে। প্রান্তের ধারণার কথা দ্বিতীয় অধ্যায়ে বলা হবে। ইহা গণিতে সম্বদ্ধতা-স্বতঃসিদ্ধ (completeness axiom) নামে পরিচিত। অতএব বাস্তবসংখ্যাগোষ্ঠী একটি সম্বদ্ধ বিন্যস্ত ক্ষেত্র (complete ordered field)।

ডেডিকিণ্ডের বাস্তব সংখ্যার তত্ত্ব : বাস্তবসংখ্যাগোষ্ঠীকে এমন দুভাগে (R, T) ভাগ করা হল যেন

(1) প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা R কিংবা T গোষ্ঠীভুক্ত

(2) R গোষ্ঠীর যে কোন বাস্তব সংখ্যা T গোষ্ঠীর প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

তাহলে এরূপ বিভাগকে আমরা ডেডিকিণ্ডের বাস্তব সংখ্যার বিভাগ (Dedekind section of real numbers) বলব। এখন এরূপ বিভাগ মাত্র দুই প্রকারের :—

(১) R গোষ্ঠীতে একটি বৃহত্তম সংখ্যা আছে, কিন্তু T গোষ্ঠীতে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নাই।

(২) R গোষ্ঠীতে কোন বৃহত্তম সংখ্যা নাই, কিন্তু T গোষ্ঠীতে একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা আছে।

ডেডিকিণ্ডের 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার বিভাগের মত এক্ষেত্রে কিন্তু এমন কোন বিভাগ থাকতে পারে না যেখানে R গোষ্ঠীতে কোন বৃহত্তম সংখ্যা নাই এবং T গোষ্ঠীতে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নাই। অতএব প্রত্যেকটি ডেডিকিণ্ডের বাস্তব সংখ্যার বিভাগের সঙ্গে একটি বাস্তব সংখ্যা (α) এমনভাবে জড়িত যে α থেকে ছোট যে কোন বাস্তব সংখ্যা R গোষ্ঠীভুক্ত এবং α থেকে বড় যে কোন বাস্তব সংখ্যা T গোষ্ঠীভুক্ত এবং α এর অবস্থান Rএ অথবা Tএ হতে পারে, যখন α এর অবস্থান Rএ, তখন R এর বৃহত্তম সংখ্যা α এবং যখন α এর অবস্থান Tএ তখন T এর ক্ষুদ্রতম সংখ্যা α।

ক্যাণ্টরের বাস্তব সংখ্যার তত্ত্ব: দশমিক সংখ্যার সাহায্যে ক্যাণ্টরের তত্ত্ব সহজভাবে বলা যেতে পারে যে, সকল দশমিক সংখ্যার মান একটি বাস্তব সংখ্যা। সংখ্যার দশমিকে প্রকাশ সসীম, আবৃত্ত বা অনন্ত এবং অপৌনঃপুনিক যাহাই হোক না কেন, ইহার মান একটি বাস্তব সংখ্যা।

উভয় তত্ত্বের দিক থেকে দেখা যায় যে বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠীর মধ্যে কোন ফাঁক (gap) নাই অর্থাৎ ইহা একটি সম্বদ্ধ বা অবিচ্ছিন্ন সংখ্যাগোষ্ঠী। এইজন্য বাস্তব সংখ্যা-গোষ্ঠীকে গাণিতিক সম্বদ্ধতা (arithmetic continuum) বলে। এখন বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠীর জ্যামিতিক রূপায়ণের জন্য যদি স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরে নেওয়া হয় যে একটি সরলরেখার প্রতিটি বিন্দুই একটি বাস্তব সংখ্যা ; তবে এই সরলরেখাটিকে বলা হয় বাস্তক অক্ষরেখা (Real axis) বা রৈখিক সম্বদ্ধতা (linear continuum) বা জ্যামিতিক সম্বদ্ধতা (geometric continuum)। বাস্তব অক্ষরেখার প্রতিটি বিন্দু একটি বাস্তব সংখ্যা সূচিত করে অথবা বিপরীতভাবে প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার প্রতিরূপ বাস্তব অক্ষরেখার উপর একটি বিন্দু। ইহাই গণিতে ক্যাণ্টর-ডেডিকিণ্ড স্বতঃসিদ্ধ (Cantor-Dedekind axiom) নামে পরিচিত। এই স্বতঃসিদ্ধের জন্য কলন-বিদ্যায় বাস্তব সংখ্যা এবং বিন্দু কথা দুইটির পারস্পরিক বিনিময়ের প্রচলন আছে।

পরিশেষে উল্লেখ করা যেতে পারে যে দুইটি বাস্তব সংখ্যার (x ও y এর) জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n বলা যেতে পারে যাতে $nx > y$। ইহাই গণিতে আর্কিমিডিসীয় ক্রম (archimedean order) সম্পর্ক নামে পরিচিত।

বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠীর বিভিন্ন ধর্মের বিমূর্ত ধারণা থেকে আধুনিক গণিতের টোপোলজি (Topology) বা বিমূর্ত বীজগণিত (abstract algebra) প্রভৃতি সবই পাওয়া যায়।

1.07 বাস্তব সংখ্যার মাপাঙ্ক (Modulus or absolute value of real number)

একটি বাস্তব সংখ্যার (x এর) মাপাঙ্ক নিম্নলিখিতভাবে ব্যাখ্যা করা যেতে পারে ঃ

$$|x| = \left.\begin{array}{ll} x, & \text{যদি } x>0 \\ -x, & \text{যদি } x<0 \\ 0, & \text{যদি } x=0 \end{array}\right\}$$

($|x| = x$ বাস্তব সংখ্যার মাপাঙ্ক)

উদাহরণ হিসাবে লেখা যেতে পারে

$$|5| = 5, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |0| = 0,$$
$$|3-5| = |-2| = 2, \text{ ইত্যাদি।}$$

এখন মাপাঙ্কের কিছু ফলাফল সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

(ক) যদি $x=y$ হয়, তবে $|x-y| = 0$;
বিপরীতভাবে $|x-y| = 0$ হইলে $x=y$

(খ) $|x-y| = |y-x|$
যেমন $|3-5| = 2 = |5-3|$

(গ) $|x-y| + |y-z| \geqslant |z-x|$
যেমন $|3-5| + |5-8| = 2+3 = 5, \quad |8-3| = 5$
$\therefore \quad |3-5| + |5-8| = |8-3|$
আবার $|4-9| + |9-5| = 5+4 = 9, \quad |5-4| = 1$
$\therefore \quad |4-9| + |9-5| > |5-4|$

মাপাঙ্কের এই তিনটি ফল উচ্চগণিতে বিশেষ প্রয়োজনীয়। যে কোন গোষ্ঠীতে যদি মাপাঙ্কের সংজ্ঞা দেওয়া থাকে এবং এই গোষ্ঠীর দুইটি বিন্দুর দূরত্ব এই মাপাঙ্কের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় এবং উপরোক্ত তিনটি ফল বলবৎ থাকে, তবে সেই গোষ্ঠীকে মেট্রিক দেশ (Metric Space) বলে।

উপরোক্ত তিনটি ফল ছাড়াও শিক্ষার্থীদের নিম্নলিখিত ফলগুলি মনে রাখা দরকার ঃ

(ঘ) $|x|$ [illegible] $y|$

(ঙ) $|xy| = |x|\,|y|$

(চ) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

(ছ) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$

(জ) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$

(ঝ) $|x/y| = |x|/|y|$, $(y \neq 0)$

(ঞ) যদি $|x| > |y|$ হয়, তবে $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|y|}$, $(x \neq 0$ বা $y \neq 0)$

এই ফলগুলির প্রমাণ অতি সহজ। যথা

উদাহরণ: প্রমাণ কর $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

প্রমাণ :—

প্রথমে ধরা যাক $x+y \geqslant 0$, তাহলে

$$|x+y| = x+y \leqslant |x| + |y|,$$

(কারণ $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$)

আবার ধরা যাক $x+y < 0$, তাহলে

$$|x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leqslant |x| + |y|.$$

1.08 অন্তরাল (Interval)

মনে কর a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$; এখন a ও b বাদে অন্তর্বর্তী অসংখ্য বাস্তব সংখ্যার রৈখিক গোষ্ঠীকে a এবং b এর মুক্ত অন্তরাল (open interval) বলা হয়।

এই মুক্ত অন্তরালের সংখ্যার প্রতীক যদি x হয়, তবে আমরা লিখতে পারি $a < x < b$; এই মুক্ত অন্তরালের প্রতীক হিসাবে আমরা লিখি (a, b)।

অনুরূপভাবে a এবং b সমেত অন্তর্বর্তী অসংখ্য বাস্তব সংখ্যার রৈখিক গোষ্ঠীকে a এবং b এর বদ্ধ অন্তরাল (closed interval) বলা হয়। এই বদ্ধ অন্তরালের সংখ্যার প্রতীক যদি x হয়, তবে আমরা লিখতে পারি $a \leqslant x \leqslant b$; এই বদ্ধ অন্তরালের প্রতীক হিসাবে আমরা লিখি $[a, b]$।

উদাহরণ: নিম্নলিখিত প্রতীকগুলি ব্যাখ্যা কর :—

$(a, b]$; $[a, b)$

উদাহরণ: নিম্নলিখিত প্রতীকটির ব্যাখ্যা কর :—

$$0 < |x-a| \leqslant b$$

উত্তর :—

$0 < |x-a|$ থেকে আমরা বুঝি $|x-a|$ রাশিটি ধনাত্মক ; কিন্তু

শুধুমাত্র ইহার জন্য '$<$' চিহ্নটি ব্যবহার করা হয় নাই, কারণ সব মাপাঙ্ক (শূন্য বাদে) তো ধনাত্মক। তাহলে ইহার দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে $x \neq a$.

এখন অপর অংশটি অর্থাৎ $|x-a| \leqslant b$ ব্যাখ্যা করা হবে।

প্রথমে ধর $x-a > 0$, তাহলে $|x-a| = x-a$

$\therefore \quad x-a \leqslant b$ অর্থাৎ $x \leqslant a+b$ $\quad \cdots$(i)

আবার মনে কর $x-a < 0$, তাহলে $|x-a| = -(x-a) = a-x$

$\therefore \quad a-x \leqslant b$ অর্থাৎ $x \geqslant a-b$ $\quad \cdots$(ii)

অতএব (i) এবং (ii) একত্রে লিখলে আমরা পাই

$$a-b \leqslant x \leqslant a+b,$$

কিন্তু $x \neq a$

প্রদত্ত প্রতীকটি তাহলে অন্তরালের মাধ্যমে লিখলে দেখা যায়

$[a-b,\ a+b]$; $\quad x \neq a$

সুতরাং প্রতীকটির দ্বারা বাস্তব সংখ্যার একটি উপগোষ্ঠীকে প্রকাশ করা হয়েছে যেখানে গোষ্ঠীর সংখ্যার প্রতীক x এবং x উপরোক্ত বদ্ধ অন্তরালের (a ব্যতীত) যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যার মান ধারণ করতে পারে।

1.09 মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা (Algebraic and transcendental numbers)

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে বাস্তব সংখ্যাগুলিকে অন্যদিক থেকে দুভাগে ভাগ করা যেতে পারে ; যথা মূলদ (algebraic) এবং অমূলদ (non-algebraic বা transcendental)। এই পুস্তকে আমরা বুঝব যে সব সংখ্যা কোন না কোন বীজগাণিতিক সমীকরণের মূল হিসাবে পাওয়া যায় তাহাই মূলদ (algebraic) সংখ্যা। যেমন $3x-2=0$সমীকরণের বীজ হিসাবে পাওয়া যায় $x=\frac{2}{3}$; অতএব $\frac{2}{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

আবার $x^2-2=0$ সমীকরণের বীজ হিসাবে পাওয়া যায় $x = \pm\sqrt{2}$;
অতএব $\pm\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ : প্রমাণ কর $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

সমাধান :—মনে কর $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$

$$\therefore \quad x-\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}$$

উভয় পক্ষকে ঘন করে আমরা পাই

$$x^3+9x-2=3\sqrt{3}\,(x^2+1)$$

আবার উভয় পক্ষকে বর্গ করে পাই

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$$

যেহেতু উপরোক্ত সমীকরণটি একটি বহুপদ সমীকরণ (polynomial equation) যাহার সহগগুলি পূর্ণসংখ্যা, যেহেতু এই সমীকরণের একটি বীজ $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

সংজ্ঞা ঃ যদি x একটি বহুপদ সমীকরণের যথা

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

বীজ হয়, যেখানে $a_0\neq0$, a_1, a_2, $\cdots$ a_n সহগগুলি পূর্ণসংখ্যা, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তবে x একটি **মূলদ সংখ্যা**।

সংজ্ঞা ঃ যে সংখ্যাকে একটি বহুপদ সমীকরণের বীজ হিসাবে প্রকাশ করা যায় না তাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলে। যেমন ঃ ত্রিকোণমিতিতে বা জ্যামিতিতে ব্যবহৃত সংখ্যা π এবং বীজগণিতে আলোচিত সংখ্যা e.

প্রশ্ন ঃ e সংখ্যাটি মূলদ না অমূলদ? উত্তর—এখনও পর্যন্ত ইহার উত্তর পাওয়া যায় নাই।

অনুশীলনী ঃ (১) প্রমাণ কর $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

(২) উদাহরণ সাহায্যে দেখাও যে 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা মাত্রেই একটি মূলদ সংখ্যা, কিন্তু যে কোন 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যাই মূলদ নয়।

বিবিধ অনুশীলনী

1. দেখাও যে দুইটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা আছে।

[**সঙ্কেত ঃ** মনে কর a এবং b $(a<b)$ দুইটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা এবং r ও n এমন দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যে $r<n$; তাহলে দেখাও

$$a<a+\frac{r}{n}(b-a)<b;$$

$r=1, 2, \cdots n-1$; n একটি সার্বভৌম (arbitrary) পূর্ণসংখ্যা।]

2. দেখাও যে কোন আবৃত্ত দশমিকের মান একটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা।

3. প্রমাণ কর $\sqrt{5}$ একটি 'ইররাস্যানাল' (irrational) সংখ্যা।

4. যদি a, b, c এমন তিনটি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা হয় যাদের দ্বারা

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$$

সিদ্ধ হয়, দেখাও যে $a=b=c=0$

5. নিম্নলিখিত অসমতাগুলি ব্যাখ্যা কর :—

(i) $|x-1|<3$, (ii) $|x+1|>2$

(iii) $|2x+1|\leqslant 1$ (iv) $|x-1|<|x+1|$

6. প্রমাণ কর $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

7. যদি a এবং b দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে

$$a<\sqrt{ab}<(a+b)/2<b$$

8. প্রমাণ কর :—

$$|x-y|\geqslant||x|-|y||,$$

x ও y দুইটি বাস্তব সংখ্যা।

9. 'র‍্যাসানাল' (rational), 'ইররাস্যানাল' (irrational), মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা লেখ। অমূলদ সংখ্যা কি 'র‍্যাসানাল' (rational) হতে পারে?

10. গ্রুপের সংজ্ঞা লেখ। বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠী কি রকম গ্রুপ তাহা ব্যাখ্যা কর।

11. 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাগোষ্ঠীর দুটি ধর্ম উল্লেখ কর।

12. বাস্তব সংখ্যাগোষ্ঠীর দুটি ধর্ম উল্লেখ কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সেট, ক্রম, শ্রেণী ও ফাংশন

2.01 প্রাথমিক মন্তব্য

সেট : প্রারম্ভিক গণিতের সকল শাখায় কোন না কোন ভাবে 'সেট' আলোচনা করতে হয়। গণিতে 'সেট' একটি প্রারম্ভিক মূলগত ধারণা। যুক্তিবিদ্যা থেকে জানা আছে কোন যুক্তিগত তত্ত্বে প্রারম্ভিক মূলগত ধারণার সংজ্ঞা দেওয়া যায় না, কাজেই সেটের সংজ্ঞা দেওয়া হলো না, উদাহরণ দিয়ে বোঝানো হলো। বস্তুসমূহের যে কোন সংগ্রহের নাম 'সেট' (Set)। বস্তুসমূহ যে কোন ধরণের হতে পারে।

যেমন (1) পাঁচটি গরুর সেট, পাঁচটি ঘোড়ার সেট। পাঁচটি ছাগলের সেট, এদের মধ্যে যে সাদৃশ্য আছে তার থেকে সংখ্যার ধারণা আসে। কাজেই সেটের ধারণা সংখ্যার ধারণা থেকে আরও মূলগত।

(2) একটি বাক্সে গহনার সেট ; (3) আবার এক কোতল কালি, একটি পেন এবং একটি ঘড়ির সেট ; কতকগুলি ছাত্রের একটি সেট। কতকগুলি বাস্তব সংখ্যার একটি সেট।

এখন সেটের বস্তুর সংখ্যা সসীম বা অসীম হতে পারে। আমাদের ব্যবহারিক জীবন থেকেই জানি যে যদি বস্তুর সংখ্যা সসীম হয় তবে সহজেই দুইটি সেটের মধ্যে তুলনা করা যেতে পারে—যেমন দুইটি সেটের মধ্যে কোনটির বস্তুসংখ্যা বেশী বা কম অথবা দুইটি সেট কি সমান। কিন্তু সেটের বস্তুসংখ্যা যদি অসীম হয় তবে কেবলমাত্র ব্যবহারিক জীবনের অভিজ্ঞতা থেকে আগের মত তুলনা করা যায় না। এসবের আলোচনার জন্য কিছু তত্ত্বের প্রয়োজন, সেটের এই তত্ত্ব বিখ্যাত গাণিতিক ক্যান্টরের দেওয়া। কলনবিদ্যায় অসীম সেটেরই আলোচনা সাধারণতঃ করা হয়। বাস্তব সংখ্যা গোষ্ঠীর মধ্যে যেমন শূন্য একটি বস্তু, তেমন যে সেটে কোন বস্তু নাই তাহাকে শূন্য সেট (Null set) বলা হয়। শূন্য সেটের একটি উদাহরণ হিসাবে বলা যায়—আমরা জানি মানুষ মাত্রই মরণশীল। কাজেই অমর মানুষের সেটটিকে শূন্য সেট ধরা যায়। একটি কারখানার কাজ বন্ধের দিন উৎপাদিত বস্তুর 'সেট'ও শূন্য সেট ধরা যায়।

সেটের প্রতীক চিহ্ন হিসাবে ইংরাজী বর্ণমালার বড় অক্ষরগুলি ব্যবহার করা হয়, সেটের বস্তুর প্রতীক চিহ্ন হিসাবে বর্ণমালার ছোট অক্ষরগুলি ব্যবহার করা হয়। যেমন

S একটি সেট এবং উহার বস্তু s, s বস্তুটি S সেটেতে আছে ; ইহা প্রতীক চিহ্নের মাধ্যমে লেখা হয় ঃ

$$s \in S$$

এরূপ s বস্তুটি S সেটে নাই বুঝাতে হলে $s \notin S$ লেখা হয়। শূন্য সেটের প্রতীক চিহ্ন ϕ, তাহলে $s \notin \phi$ অর্থাৎ শূন্য সেটে কোন বস্তু s নাই।

কলনবিদ্যায় আমরা সাধারণতঃ বাস্তব সংখ্যার সেটের কথা বলব। যেমন $[0, 1]$ এই বদ্ধ অন্তরালের (closed interval) সকল বাস্তবসংখ্যাকে একটি সেট হিসাবে কল্পনা করতে পারি। এই সেটকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যেতে পারে

$$[0, 1] = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

এরূপভাবে মুক্ত অন্তরালে $(0, 1)$ কে লেখা যায় $(0, 1) = \{x \mid 0 < x < 1\}$, অনুরূপভাবে $[0, 1) = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$, $(0, 1] = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$ লেখা যায়। এই অধ্যায়ে আমরা সেটের কিছু তত্ত্বের আলোচনা করব।

ক্রম ঃ সেটের পর আমরা ক্রমের ধারণায় আসব। যখন বস্তুগুলির মধ্যে আমরা কোনটি প্রথম, কোনটি দ্বিতীয়, কোনটি তৃতীয়,⋯এরূপ বুঝতে পারব তখন সেই সেটকে বলা হবে বলা হবে ক্রম (Sequence)। উদাহরণ হিসাবে নিম্নলিখিত সেট ধরা যেতে পারে ঃ

$$S = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots\cdots\}$$

এই সেটের প্রথম বস্তু 1, দ্বিতীয় বস্তু $\frac{1}{2}$, তৃতীয় বস্তু $\frac{1}{3}$,⋯⋯n-তম বস্তু $\dfrac{1}{n}$। তাহলে দেখা যায় ক্রমের বস্তুগুলিকে সব সময় নিম্নলিখিতভাবে সাজানো যেতে পারে ঃ

$$S = \{s_1, s_2, s_3 \cdots\cdots s_n \cdots\cdots\}$$

সহজেই বুঝা যায় সকল ক্রমই সেট, কিন্তু সকল সেটই ক্রম নয়। যে ক্রমের বস্তুগুলি $s_1, s_2, \cdots\cdots s_n \cdots\cdots$ তাহাকে সংক্ষেপে লেখা হয় $\{s_n\}$. ক্রমের এই ধারণা শ্রেণীর (series) আলোচনায় অত্যন্ত প্রয়োজনীয়। এই অধ্যায়ে ক্রমের সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা হবে।

শ্রেণী ঃ ক্রমের পর আমরা শ্রেণী (Series) সম্বন্ধে আলোচনা করব। প্রাক্ কলনবিদ্যায় আমাদের কিছু কিছু শ্রেণীর ধারণা হয়েছে। যেমন সমান্তর শ্রেণী বা গুণোত্তর শ্রেণী। কিন্তু এই শ্রেণীর সহিত ক্রমের যে একটি পারস্পারিক সম্পর্ক আছে

তার উপর বিশেষ নজর প্রাক্ কলনবিদ্যায় দেওয়ার অবকাশ হয় নাই। উদাহরণ হিসাবে নিম্নলিখিত শ্রেণী ধরা যাক

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$$

ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী যাহার সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$। আমরা জানি এই শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল

$$s_n = 1\,.\,\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\{1-2^{-n}\}$$

সহজেই পাওয়া যায়

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2\{1-2^{-2}\} = \tfrac{3}{2},\ s_3 = \{1-2^{-3}\} = \tfrac{7}{4},$$

ইত্যাদি। তাহলে আমরা দেখি এই গুণোত্তর শ্রেণীর সহিত একটি ক্রম, যথা $\{s_n\}$, জড়িত। এই ক্রমের বস্তুগুলিকে শ্রেণীর আংশিক যোগফল (partial sum) বলে। অতএব এই ক্রম বা সেটের ধর্মের উপর শ্রেণীর ধর্ম নির্ভর করছে।

আলোচ্য অধ্যায়ে শ্রেণী ও ক্রমের পারস্পরিক ধর্মের কথা উদাহরণ সাহায্যে আরও বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

ফাংশন: সবশেষে আলোচনার বস্তু হবে ফাংশন (function)। ফাংশনের ধারণাটিও কলনবিদ্যার একটি মূল ধারণা। এই মূল ধারণাটি ভালভাবে না বুঝলে কলনবিদ্যা আয়ত্ব করা কষ্টসাধ্য হবে। তাই প্রাথমিক মস্তে. ফাংশনের ধারণাটি একটু বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

যদি কোন রাশি বিভিন্ন মান গ্রহণ করে তবে তাকে চল (variable) বলে। যদি কোন রাশির মান সকল সময়ই এক থাকে তবে তাকে ধ্রুবক (constant) বলে। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে ধ্রুবক রাশির জন্য বর্ণমালার গোড়ার দিকের অক্ষর ব্যবহার করা হয়, যেমন—$a, b, c, \cdots\cdots p, q, \cdots\cdots$। চল রাশির জন্য বর্ণমালার শেষের দিকের অক্ষরগুলি ব্যবহার করা হয়, যেমন $x, y, z, u, v, \cdots$। উদাহরণ হিসাবে বলা যেতে পারে কোন ব্যক্তির বয়স একটি চলরাশি ; বায়ুমণ্ডলের বিভিন্ন স্তরের চাপের মান একটি চলরাশি ; কোন শিল্পের দৈনিক উৎপাদন একটি চলরাশি, কিন্তু নিয়োজিত মূলধন সাধারণতঃ ধ্রুবক। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের যে কোন বিন্দুর দূরত্ব একটি ধ্রুবক ; জ্যামিতি থেকে জানি, বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্যের ও বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের দৈর্ঘ্যের অনুপাত একটি ধ্রুবক। পদার্থবিদ্যায় জানি চাপ ও ঘনত্বের গুণফলের ও তাপের অনুপাত একটি

ধ্রুবক। এখন চলরাশির মান পরিবর্তনের একটি বিশেষ ক্ষেত্র (বা অঞ্চল বা এলাকা) আছে। যেমন বৃত্তের পরিধির উপর চলবিন্দুর ক্ষেত্র বৃত্তের পরিধি, ব্যক্তির বয়স (চলরাশি) বৎসর বা মাসের একটি সসীম ক্ষেত্র, বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্র ক্যাণ্টর-ডেডি -কিণ্ডের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে একটি সরলরেখা। প্রত্যেক চলরাশির একটি বিশেষ অঞ্চল (domain) আছে। চলরাশির সহিত অঞ্চলটি পরিষ্কার ভাবে না বললে চলরাশির প্রকৃত পরিচয় পাওয়া যায় না। যেমন মনে কর $\frac{1}{x}$ একটি চলরাশি, যেখানে x একটি বাস্তব সংখ্যা ; কিন্তু এই চলরাশির অঞ্চলের মধ্যে শূন্য থাকতে পারে না, কারণ $\frac{1}{0}$ অর্থহীন, গণিতে কোন সংখ্যাকে শূন্য দ্বারা ভাগ করা যায় না। উদাহরণ হিসাবে ধর $a=b$, তাহলে $a^2=ab$, অতএব $a^2-b^2=ab-b^2$ অথবা $(a+b)(a-b)=b(a-b)$. এখন উভয় পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা ভাগ করিলে পাওয়া যায় $a-b=b$, অর্থাৎ $a=2b$, কিন্তু $a=b$ $\therefore$ $b=2b$ অর্থাৎ $1=2$, ইহা অসম্ভব। এই অসম্ভব সিদ্ধান্তের কারণ আমরা উভয় পক্ষকে $(a-b)$ দ্বারা অর্থাৎ শূন্য দ্বারা (কারণ $a=b$) ভাগ করেছি। যাই হোক সীমার ধারণায় দেখা যাবে যখন x শূন্যের খুব কাছাকাছি তখন $\frac{1}{x}$ এর অবস্থা কি রকম।

এখন দুইটি চলরাশি যদি এমন হয় যে একটি অপরটির উপর নির্ভরশীল তাহলে আমরা বলি একটি চলরাশি অপরটির ফাংশন (Function)। যেমন ব্যক্তির ওজন তাহার বয়েসের উপর নির্ভর করে, তাহলে ব্যক্তির ওজন তাহার বয়সের একটি ফাংশন। বায়ুমণ্ডলের কোন স্তরে চাপ (একটি চলরাশি) ঐ স্তরের উষ্ণতার (অপর একটি চলরাশির) উপর নির্ভরশীল। শিল্পের দৈনিক উৎপাদান (একটি চলরাশি) ঐ শিল্পে দৈনিক কত ঘণ্টা (অপর একটি চলরাশি) কাজ হল তার উপর নির্ভরশীল। মানুষের নাড়ীর স্পন্দন সংখ্যা (একটি চলরাশি) প্রতি নিশ্বাস প্রশ্বাসের (অপর একটি চলরাশি) সংখ্যার উপর নির্ভরশীল। অতএব যদি x ও y দুইটি চলরাশি এমন হয় যে y চলরাশির মান x চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে, তাহলে y চলরাশি x চলরাশির একটি ফাংশন।

প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয় $y=f(x)$.

এই অধ্যায়ে ফাংশনের বিস্তারিত আলোচনা না করে পরের অধ্যায়গুলিতে করা হবে, কারণ ফাংশনের আলোচনায় 'সীমা' বা 'অবিচ্ছিন্নতা' ব্যতিরেকে আলোচনা অসম্পূর্ণ হয়ে ওঠে। যাইহোক এখানে কিছু ফাংশনের উদাহরণ দেওয়া হবে।

2.02 সেট

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে বস্তুসমূহের যে কোন সংগ্রহের নাম সেট (Set)। কলনবিদ্যায় সেট বলতে আমরা সাধারণতঃ বুঝি বাস্তব সংখ্যার কোন একটি সংগ্রহ। যেমন বাস্তব সংখ্যার প্রতীক যদি x হয়, তবে x এর একটি অঞ্চল (domain) বলতে বুঝা যায় বাস্তব সংখ্যার একটি সংগ্রহ। আবার কতকগুলি অন্তরালের (Interval) সংগ্রহকেও সেট বলা যায় যেমন—

$$(0, 1),\ \ (1, 2),\ \ (2, 3),\ \cdots\cdots .$$

তাহলে দেখা যায় যে কোন বস্তুসমূহের যে কোন সংগ্রহকে সেট বলা হয়। এখন যদি A এমন একটি সেট যার প্রত্যেকটি বস্তু অপর একটি সেটের (B এর) এক-একটি বস্তু, তাহলে A সেটকে B সেটের **উপসেট** (Subset) বলে ; প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে ইহা লেখা হয়

$$A \subseteq B$$

অথবা $B \supseteq A.$

উপরোক্ত প্রতীক চিহ্ন থেকে বুঝা যায় A সেট B সেটের অংশ হতে পারে অথবা A সেট B সেটের সমান হতে পারে—যদিও 'সমান' কথাটির অর্থ পরে সঠিকভাবে দেওয়া হবে, তবে এখন শুধু এটুকু বলা যেতে পারে যে যখন A সেটের মধ্যে যে যে বস্তু আছে, সেই সব বস্তু যদি B সেটে থাকে এবং B সেটে আর কোন বস্তু নেই, তবে A সেট B সেটের সমান। কিন্তু যদি দুইটি সেটের সমানের সম্ভাবনা না থাকে অর্থাৎ B সেটের অন্তত এমন একটি বস্তু আছে যা A সেটে নাই, এবং A সেটের প্রত্যেকটি বস্তু B সেটের একটি বস্তু, তখন আমরা লিখি

$$A \subset B$$

অর্থাৎ A সেট B সেটের একটি **প্রকৃত উপসেট** (Proper Subset)। অধিকন্তু A সেট কি নিজের অর্থাৎ A সেটের উপসেট হতে পারে না ? এ প্রশ্নের জবাবে বলতে হয় হ্যাঁ, অর্থাৎ $A \subset B$ প্রতীক চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয়, A সেট B সেটের উপসেট অথবা A সেট B সেটের সমান। যাইহোক যারা কলনবিদ্যার প্রথম পাঠক তাদের '$\subseteq$' এবং '$\subset$' প্রতীক চিহ্ন হিসাবে অভ্যাস করা ভাল।

উদাহরণ :—

1. যদি $A =$ সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সেট এবং B বাস্তব সংখ্যার সেট হয়, তবে $A \subset B.$

2. যদি $A = \{2, 3\}$ এবং $B = \{$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\}$ হয় তবে $A = B$.

3. যদি $A =$ সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সেট হয়, তবে

$$\tfrac{3}{4} \in A, \quad \sqrt{3} \notin A,$$

অর্থাৎ $\frac{3}{4}$ 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যাটি A তে আছে এবং $\sqrt{3}$ 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যাটি A তে নাই।

4. যদি $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$ এবং $B = \{x \mid 0 < x < 1\}$ হয়, তবে $A \supset B$, $0 \notin A$, $0 \notin B$, $1 \in A$, $1 \notin B$, $2 \notin A$, ইত্যাদি।

5. যদি $A = \{a, b, c, d\}$ হয়, তাহলে A সেটের নিম্নলিখিত ষোলটি উপসেট তৈরী করা যেতে পারে:

$\{a, b, c, d\}$,

$\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c\}$,

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$,

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$,

ϕ.

ϕ চিহ্নটি শূন্য সেটের প্রতীক, ইহার দ্বারা এমন একটি সেট বুঝায় যার মধ্যে কোন বস্তু নাই।

6. যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়, তবে $A = B$; অর্থাৎ যদি দুইটি সেট A ও B এমন হয় যে A সেটের প্রত্যেকটি বস্তু B সেটের মধ্যে আছে এবং B সেটের প্রত্যেকটি বস্তু A সেটের মধ্যে আছে, তাহলে $A = B$.

7. একটি বস্তুর দ্বারা গঠিত সেটকে **একক বস্তুর সেট** বলা হয়। যদি $A = \{2\}$ হয়, তাহলে $\{2\}$ এবং 2 এক জিনিষ নয়; কারণ $\{2\}$ একটি বস্তু অর্থাৎ 2 দ্বারা গঠিত সেট, কিন্তু 2 একটি বাস্তব সংখ্যা। অতএব $\{2\} = 2$ লেখা যেতে পারে না।

8. নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি সেট অন্যটি হইতে পৃথক:

$$\phi, \ \{0\}, \ \{\phi\}.$$

9. লক্ষ্য কর:

(1) $A \subseteq A$

(2) যদি $A \subseteq B$ হয়, তবে $B \subseteq A$ হইতে পারে না (যদি $A = B$ হয়, তবে $B = A$ হইবে)।

(3) $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ হয় তবে $A \subseteq C$.

তৃতীয় ধর্মের প্রমাণটি সহজেই দেওয়া যেতে পারে। যদি $A \subseteq B$ হয় তবে A এর প্রত্যেকটি বস্তু (যথা x) B এতে আছে, ইহা প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয় ঃ

$$x \in A \Rightarrow x \in B*$$

আবার যেহেতু $B \subseteq C$, $x \in B \Rightarrow x \in C$.

উপরোক্ত দুইটি সর্ত থেকে সহজেই পাওয়া যায়

$$x \in A \Rightarrow x \in C$$

অর্থাৎ $A \subseteq C$.

10. উপরোক্ত প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে দুইটি সেটের সমতা নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায়

যদি $A = B$ হয়, তবে

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

এবং $x \in B \Rightarrow x \in A$

উপরোক্ত একজোড়া প্রতীক চিহ্ন একটি প্রতীক চিহ্ন দ্বারা লেখা যায়, যথা

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

11. দেখাও যে,

$$A \subseteq B \text{ এবং } B \subseteq A \Longleftrightarrow A = B.$$

2.03 সেটের মূল প্রক্রিয়া

সংখ্যার যেমন মূল প্রক্রিয়া আছে, যথা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ, সেটেরও মূল প্রক্রিয়া আছে। এখন সেটের মূল প্রক্রিয়াগুলি বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

যদি দুইটি সেটের মধ্যে (ধর A ও B) যে বস্তুগুলি সাধারণ (common) তাদের দ্বারা একটি সেট গঠন করলে এই নূতন সেটকে A ও B এর **প্রতিচ্ছেদ** (Intersection or Meet) বলে। এই নূতন সেটের প্রতীক চিহ্ন

$$A \cap B.$$

উদাহরণ ঃ (১) যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, তবে $A \cap B = \{3, 4\}$.

(২) যদি A = সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সেট এবং B = সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট হয়, তবে $A \cap B = A$.

---

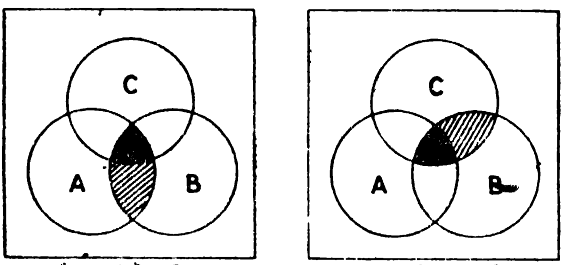
* $\Rightarrow$ চিহ্নটির অর্থ 'বুঝায়'। অর্থাৎ $x \in A$ বুঝায় $x \in B$, আধুনিক গণিতে ইহা বহুল প্রচলিত।

যদি $A \cap B=\phi$ হয়, তবে A ও B সেট দুইটি সম্পূর্ণ পৃথক অর্থাৎ উহাদের কোন সাধারণ বস্তু নেই। এরূপ ক্ষেত্রে A ও B সেট দুটিকে বলা হয় **অসংলগ্ন** (বা বিযুক্ত) (disjoint or mutually exclusive) সেট।

প্রতিচ্ছেদ—প্রক্রিয়ার নিম্নলিখিত নিয়মগুলি সহজেই প্রতিপন্ন করা যায়ঃ

1. $(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$ (সংযোগ নিয়ম)
2. $A \cap B=B \cap A$ (বিনিময় নিয়ম)
3. $A \cap A=A$ [একক-শক্তি নিয়ম (idempotent law)]

ভেন-চিত্রের (Venn's diagram) সাহায্যে সহজেই উপরোক্ত নিয়মগুলির সত্যতা প্রমাণ করা যেতে পারে। ভেনচিত্রে একটি সেটকে একটি বৃত্তের মধ্যবর্তী স্থানরূপে কল্পনা করা হয় এবং সেটগুলিকে সদৃশ (similar) এবং আংশিক আবৃত্ত (overlapping) বৃত্তরূপে কল্পনা করা হয়। এখন সংযোগ নীতির সত্যতা সম্বন্ধে নিম্নলিখিত ভেন-চিত্র লক্ষ্য করা যেতে পারেঃ



$(A \cap B) \cap C$ $A \cap (B \cap C)$

এই ভাবে ভেন-চিত্রের সাহায্যে সেট তত্ত্বের যে কোন নিয়ম খুব সহজে প্রতিপন্ন করা যায়।

ধরা যাক A ও B দুইটি সেট। এখন A সেটের সব বস্তুগুলি নেওয়া হল এবং দুইটি সেটের প্রতিচ্ছেদ বাদে B সেটের বাকী বস্তুগুলি নেওয়া হল। এই নূতন সেটকে A ও B এর **সংযোগ** (Join or union) বলা হয়। অনুরূপভাবে A ও B এর সংযোগ বলতে বুঝা যায় B সেটের সব বস্তুগুলি এবং তৎসঙ্গে দুইটি সেটের প্রতিচ্ছেদ বাদে A সেটের বাকী বস্তুগুলির সমাবেশ। এই নূতন সেটের প্রতীক চিহ্ন

$$A \cup B.$$

উদাহরণ। (১) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$, তবে

$$A \cup B=\{1, 2, 3. 4, 5, 6\}.$$

(২) যদি $A=$ সমস্ত 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার সেট এবং $B=$ সমস্ত

'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যার সেট হয়, তবে

$A \cup B =$ সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট

যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তবে $A \cup B$ বলতে আমরা বুঝি A এবং B সেটের সমস্ত বস্তুর একত্র সমাবেশ।

সংযোগ-প্রক্রিয়ার নিম্নলিখিত নিয়মগুলি সহজেই প্রতিপন্ন করা যায় ঃ···

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (সংযোগ বা মিলন নিয়ম)

2. $A \cup B = B \cup A$ (বিনিময় নিয়ম)

3. $A \cup A = A$ (একক-শক্তি-নিয়ম)

সেটের নিম্নলিখিত বিচ্ছেদ নিয়ম দুইটি লক্ষ্যনীয় ঃ

(i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

উদাহরণ ঃ

যদি $A = \{6, 12, 36\}$, $B = \{3, 6, 18\}$ এবং $C = \{2, 6, 36\}$ হয় তবে উপরোক্ত বিচ্ছেদ নিয়ম দুইটির সত্যতা প্রতিপন্ন কর।

উত্তর—

(i) $A \cup B = \{6, 12, 36, 3, 18\}$

$(A \cup B) \cap C = \{6, 36\}$

আবার $A \cap C = \{6, 36\}$, $B \cap C = \{6\}$

$\therefore \quad (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{6, 36\}$

অতএব $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

অনুরূপভাবে (ii) নিয়মের সত্যতা প্রতিপন্ন করা যায়। দুইটি সেটের মধ্যে বিয়োগ প্রক্রিয়া সম্বন্ধে কিছু বলা হবে। মনে কর A ও B দুইটি সেট। এখন $A \setminus B$ অথবা $(A - B)$ প্রতীক চিহ্ন দ্বারা বুঝানো হয় A সেটের সেই সব বস্তু যেগুলি B সেটের মধ্যে নাই।

উদাহরণ। যদি $A = \{6, 12, 36\}$

এবং $B = \{3, 6, 18\}$ হয়

তবে $A \setminus B = \{12, 36\}$

যদি $A \supset B$ হয়, তবে $A \setminus B$ সেটটিকে A সেটের সাপেক্ষে B সেটের পূরক (Complement) বলা হয়।

আবার I যদি সমগ্র (universal) সেট হয়, তবে $I \supset A$, A যে কোন সেট হোক না কেন। I সেটের সাপেক্ষে কোন সেটের পূরক সেটকে শুধু পূরক সেট বলা হয়—এ ক্ষেত্রে A সেটের পূরক সেটকে লেখা হয় A' (অথবা A^C) চিহ্ন দ্বারা।

সমগ্র সেটের সম্পর্কে নিম্নলিখিত নিয়মগুলি উল্লেখ করা যেতে পারে :

1. $A \cup A' = I$ } (পূরক সংক্রান্ত নিয়ম)
2. $A \cap A' = \phi$ }
3. $A'' = (A')' = A$ (উদঘাতন নিয়ম)
4. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ } (দ্বৈত করণ-নিয়ম বা ডি মরগ্যান নিয়ম)
5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ }

2.04 গণনীয় ও অগণনীয় সেট

পূর্বে বলা হয়েছে সেটের বস্তু সংখ্যা যখন সসীম তখন দুইটি সেটের মধ্যে তুলনা করা সম্ভব। কিন্তু যখন সেটের বস্তু সংখ্যা অসীম তখন দুইটি সেটের তুলনা করা সহজ নয়। সেইজন্য এখানে আমরা গণনীয় সেটের সংজ্ঞার কথা বলব। সমস্ত অসীম সেটের মধ্যে সবচেয়ে সরল সেট হচ্ছে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট অর্থাৎ $\{1, 2, 3 \cdots\cdots\}$।

এখন A যদি এমন একটি অসীম সেট হয় যার বস্তুগুলির মধ্যে এমন একটি নিয়ম দেখা যায় যে 1 এর সংগত A এর একটি বস্তু a_1 আছে, 2 এর সংগত A এর একটি বস্তু a_2 আছে, ইত্যাদি ; এবং বিপরীতক্রমে a_1 এর সংগত 1, a_2 এর সংগত 2, ইত্যাদি ; তাহলে A সেটকে একটি গণনীয় (enumerable) সেট বলা হয়। অর্থাৎ যে সেটের বস্তুগুলিকে পরপর স্বাভাবিক সংখ্যার সঙ্গে এক এক সম্বন্ধ বিশিষ্ট করা যাবে সেই A সেটকে গণনীয় বলা হবে।

যথা :— মনে কর $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots\}$

এখানে লক্ষ্য করা যায়

$1 \leftrightarrow 1$, $\frac{1}{2} \leftrightarrow 2$, $\frac{1}{3} \leftrightarrow 3$, ইত্যাদি।

সংজ্ঞানুসারে A একটি গণনীয় সেট। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$A \sim \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

গণনীয় সেটের উদাহরণ :—

(১) $\{1, 4, 9, 16, \cdots\cdots\}$

(২) $\{1, 8, 27, \cdots\cdots\}$

(৩) $\{2, 4, 6, \cdots\cdots\}$

(৪) $\{1, 3, 5, \cdots\cdots\}$

(৫) সকল পূর্ণসংখ্যার সেট গণনীয়, কারণ

$$0 \leftrightarrow 1,$$
$$-1 \leftrightarrow 2, \quad 1 \leftrightarrow 3,$$
$$-2 \leftrightarrow 4, \quad 2 \leftrightarrow 5,$$
$$-3 \leftrightarrow 6, \quad 3 \leftrightarrow 7,$$ ইত্যাদি।

সংগত বস্তুগুলি বাহির করার নিয়ম নীচে দেওয়া হল ঃ

$n \leftrightarrow 2n+1$, যখন $n \geqslant 0$

এবং $n \leftrightarrow -2n$, যখন $n < 0$.

উপরোক্ত গণনীয় সেটের উদাহরণ থেকে সিদ্ধান্ত করে নেওয়া যায় না যে সকল অসীম সেটই গণনীয়। কারণ গণিতে এমন সেট আছে যা অগণনীয় অর্থাৎ গণনীয় নয়। উদাহরণ হিসাবে বলা যেতে পারে যে (0, 1) এই মুক্ত অন্তরালের সকল বাস্তব সংখ্যার সেট অগণনীয়। ইহার প্রমাণের জন্য এই অন্তরালের প্রত্যেক সংখ্যাকে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হল। পৌনঃপুনিক দশমিকে পুনঃ পুনঃ লিখে ও সসীম দশমিক ভগ্নাংশের পরে বার বার শূন্য লিখে সকলকে অসীম ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা হল। যদি ইহা গণনীয় হয় তবে এসব সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যাগুলির সহিত এক এক সম্বন্ধ-বিশিষ্ট করে সাজান হল। n-এর সঙ্গে সংখ্যাটিকে $\cdot a_1^{(n)}\, a_2^{(n)} \cdots\cdots a_n^{(n)} \cdots$ করে লেখা হল এবং এভাবে (0, 1) এর সব সংখ্যা সাজিয়ে নেওয়া হল। এখন একটি সংখ্যা নেওয়া হল $\cdot\, a'_1\, a'_2 \cdots\cdots a'_n \cdots\cdots$,

$$\left.\begin{aligned} \text{যেখানে } a'_n &= a_n^{(n)} + 1, \text{ যদি } a_n^{(n)} = 0 \text{ বা } 1, 2, \cdots 8 \text{ হয়} \\ &= 0, \text{ যদি } a_n^{(n)} = 9 \text{ হয়} \end{aligned}\right\} ;$$

এই সংখ্যাটি অবশ্যই (0, 1) অন্তরালের একটি সংখ্যা, কিন্তু এর সঙ্গে আগের নিয়ম মত এক এক সম্বন্ধ বিশিষ্ট কোনও স্বাভাবিক সংখ্যা নেই। কাজেই (0, 1) সেটটি গণনীয় নয়।

2.05 সেটের প্রান্ত

সেটের বস্তুগুলি যদি বাস্তব অক্ষরেখার (real axis) কতকগুলি বিন্দু নিয়ে গঠিত হয় তবে সেই সেটকে আমরা **একমাত্রিক বিন্দুর সেট** (one-dimensional point set) বলি। অনুরূপভাবে সেটের বস্তুগুলি যদি কার্টেসীয় সমতলের (Cartesian plane) কতকগুলি বিন্দু নিয়ে গঠিত হয় তবে সেই সেটকে আমরা **দ্বিমাত্রিক**

বিন্দুর সেট (two-dimensional point set) বলি। যে ত্রিমাত্রিক দেশে (three-dimensional space) আমরা বাস করি সেই দেশের কতকগুলি বিন্দু নিয়ে যদি সেট গঠিত হয় তবে সেই সেটকে **ত্রিমাত্রিক বিন্দুর সেট** (three-dimensional point set) বলে। কলন বিদ্যায় সাধারণতঃ এই সব বিন্দুর সেট নিয়ে আলোচনা করা হয়। তাই এই সব সেটের কিছু আলোচনা প্রয়োজন। সবচেয়ে সহজ হয় যদি আমরা একমাত্রিক বিন্দুর সেট নিয়ে আলোচনা করি ; তাই আমরা প্রথমে একমাত্রিক বিন্দুর সেট নিয়েই আলোচনা করব। এই বিন্দুর সেটের চৌহদ্দি বা এলাকা সম্বন্ধে ভাল ধারণা না থাকলে কলন-বিদ্যা আয়ত্ব করা কঠিন হয়ে পড়ে।

যদি আমরা স্বাভাবিক সংখ্যার সেট লই তাহলে দেখা যায় যে এই সেটের বামপ্রান্তে 1 আছে, কিন্তু ডান প্রান্তে কোন্ সংখ্যা আছে তা বলা দুরূহ ব্যাপার, কারণ স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি বাড়তে বাড়তে যে কোথায় চলে গেছে তার নিশানা নাই। তাহলে স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের বামপ্রান্তে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা আছে বলা যায়, কিন্তু ডান প্রান্তে কোন্ স্বাভাবিক সংখ্যা আছে বলা যায় না—এই ধারণা থেকে সেটের প্রান্তের ধারণা আসে।

এখন সাধারণভাবে বাস্তব সংখ্যার যে কোন একটি সেটের প্রান্তের সংজ্ঞায় আসা যাক। মনে কর S একটি বাস্তব সংখ্যার সেট। এখন যদি u_1 একটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় যার দ্বারা নিম্নলিখিত সম্বন্ধ সিদ্ধ হয়

$$s \leqslant u_1, \text{ যখনই } s \in S,$$

তাহলে S সেট দক্ষিণ প্রান্তে u_1 সংখ্যার দ্বারা বদ্ধ এবং u_1 একটি দক্ষিণ প্রান্ত (বা **উচ্চ প্রান্ত**)। সহজেই অনুমেয় যে u_1 এর অস্তিত্ব থাকলেই অনেক এরকম উচ্চ প্রান্ত বলা যেতে পারে। যথা: $u_2, u_3 \cdots\cdots$, যেখানে $u_1 < u_2 < u_3 < \cdots\cdots$. এখন এই সব উচ্চ প্রান্তের মধ্যে যেটি লঘিষ্ঠ (least) তাকে **লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত** (least upper bound), সংক্ষেপে ল. উ. প্রা. বলা হয়। সেটটি যখন দক্ষিণ প্রান্তে বদ্ধ, তখন এই লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত সেটের মধ্যে থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। সকল উচ্চ প্রান্তের এই লঘিষ্ঠ সংখ্যার অস্তিত্ব ডেডিকিণ্ডের তত্ত্বের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে।

সংজ্ঞা: সেটের উচ্চ প্রান্তিক সংখ্যাদের লঘিষ্ঠকে 'লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত' (ল. উ. প্রা.) বলা হয়।

উদাহরণ।

মনে কর S = সকল ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশের সেট

এই সেটের উচ্চ প্রান্ত হিসাবে নিম্নলিখিত যে কোন বিন্দু ধরা যেতে পারে

$$1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \tfrac{7}{3},\ \cdots\cdots$$

এখন এই সকল উচ্চ প্রান্ত সংখ্যাদের মধ্যে লঘিষ্ঠ সংখ্যা হয় 1, অতএব 1 এই সেটের লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত। কিন্তু এই লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত সেটের মধ্যে নাই।

অনুরূপভাবে নিম্নপ্রান্তের সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে। মনে কর S একটি বাস্তব সংখ্যার সেট। এখন যদি l_1 একটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় যার দ্বারা নিম্নলিখিত সম্বন্ধ সিদ্ধ হয় ঃ—

$$s \geqslant l_1, \ s \in S,$$

তাহলে S সেট বাম প্রান্তে l_1 সংখ্যার দ্বারা বদ্ধ এবং l_1 একটি বাম প্রান্তিক সংখ্যা (বা নিম্ন প্রান্ত)। সহজেই অনুমেয় যে l_1 এর অস্তিত্ব থাকলেই অনেক এরকম নিম্ন প্রান্ত সংখ্যা বলা যেতে পারে। যথা ঃ—l_2, l_3, ……, যেখানে $l_1 > l_2 > l_3 >$ …… এখন এই সব নিম্ন প্রান্ত বিন্দুর মধ্যে যেটি গরিষ্ঠ (greatest) তাকে **গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত** (greatest lower bound), সংক্ষেপে গ. নি. প্রা. বলা হয়। সেটটি যখন বাম প্রান্তে বদ্ধ, তখন এই গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত সেটের মধ্যে থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। সকল নিম্ন প্রান্তিক সংখ্যাদের এই গরিষ্ঠ সংখ্যার অস্তিত্ব ডেডিকিণ্ডের তত্ত্বের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ সেটের নিম্ন প্রান্তিক সংখ্যাদের গরিষ্ঠকে 'গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত' (গ. নি. প্রা.) বলা হয়।

উদাহরণ ঃ

মনে কর $S =$ সকল ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশের সেট

এই সেটের নিম্ন প্রান্ত হিসাবে নিম্নলিখিত যে কোন সংখ্যা ধরা যেতে পারে

$$0, \ -1, \ -\tfrac{5}{2}, \ -\sqrt{7}, \ \ldots\ldots$$

এখন এই সকল নিম্ন প্রান্তিক সংখ্যাদের মধ্যে গরিষ্ঠ সংখ্যা হয় 0 ; অতএব 0 এই সেটের গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত। কিন্তু এই গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত সেটের মধ্যে নাই।

মন্তব্য। যদি একটি সেট উচ্চ এবং নিম্ন প্রান্ত দ্বারা বদ্ধ হয় তবে সেই সেটকে উভয় প্রান্তে বদ্ধ (bounded both above and below) বলা হয়। সকল ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশের সেটটি উভয় প্রান্তে বদ্ধ, কারণ এখানে $0 < s < 1$, $s \in S$ = সকল ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশের সেট। আবার আমরা দেখি $1 < 0 < s < 1$ অর্থাৎ $|s| < 1$. অতএব সাধারণভাবে যদি একটি সেট S উভয় প্রান্তে বদ্ধ হয়, তবে একটি ধনাত্মক সংখ্যা K এমন থাকবে যার দ্বারা আমরা লিখতে পারি $|s| < K$, $s \in S$.

প্রান্তের বিশেষ ধর্ম :

এখন প্রান্তের বিশেষ ধর্মের কথা বলা হবে। কারণ কলন-বিদ্যায় এই বিশেষ ধর্মের বহুল প্রয়োগ আছে।

মনে কর S একটি সেট উচ্চ প্রান্তে বদ্ধ এবং এই সেটের লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত M ; পূর্বেই বলা হয়েছে M বিন্দু S সেটের মধ্যে থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। অতএব M এর প্রথম ধর্ম হিসাবে আমরা পাই

$$s \leqslant M, \ s \in S \qquad (1)$$

যেহেতু M সকল উচ্চ প্রান্তিক সংখ্যাদের মধ্যে লঘিষ্ঠ ;

অতএব M থেকে একটু ধনাত্মক ছোটো সংখ্যা বিয়োগ করলে S সেটের অন্ততঃ পক্ষে একটি সংখ্যা s' এমন পাওয়া যাবে যাতে এই s' সংখ্যা $(M-\epsilon)$ সংখ্যা অপেক্ষা বড় হবে অর্থাৎ M এর দ্বিতীয় ধর্ম হিসাবে আমরা পাই

$$M-\epsilon < s', \ s' \in S \qquad (2)$$

(ϵ যত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা হউক না কেন)

অনুরূপভাবে গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্তের নিম্নলিখিত দুইটি ধর্ম বিদ্যমান ; মনে কর একটি সেট S নিম্নপ্রান্তে বদ্ধ এবং m তার গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত। তাহলে আমরা পাই

$$s \geqslant m, \ s \in S \qquad (3)$$

$$\text{এবং } m+\epsilon > s', \ s' \in S \qquad (4)$$

মন্তব্য : একটি সেট S যদি এমন হয় যে $m=M$, তাহলে সেটের সকল বস্তু সমান।

উদাহরণ :

মনে কর S সেট সকল বাস্তব সংখ্যার দ্বারা গঠিত। তাহলে এই সেটের কি প্রান্ত আছে ? সকল বাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক প্রতিরূপ বাস্তব অক্ষরেখা, এই বাস্তব অক্ষরেখা অসীম অর্থাৎ এর কোন প্রান্ত পাওয়া যায় না। বাস্তব অক্ষরেখার মূলবিন্দু থেকে ডান-দিকে অগ্রসর হলে দেখা যায় সংখ্যাগুলি ক্রমশ বাড়তে বাড়তে কোথায় যে পৌঁছায় তার হদিশ মেলে না ; আবার মূল বিন্দু থেকে বাম দিকে অগ্রসর হলে দেখা যায় সংখ্যাগুলি ক্রমশ কমতে কমতে কোথায় যে পৌঁছায় তার হদিশ মেলে না। কলন বিদ্যায় এই সেটের দুই প্রান্ত কল্পনা করে নেওয়া হয়েছে, যথা $-\infty$ এবং $+\infty$; আসলে $-\infty$ বা $+\infty$ বাস্তব সংখ্যাই নয়। তাহলে বাস্তব সংখ্যার সেটটিকে লেখা যেতে পারে

$$S=\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

অতএব দেখা যায় এই সেটের দুই প্রান্ত হিসাবে $-\infty$ এবং $+\infty$ ধরা যেতে পারে না, কারণ প্রান্তের ধারণায় আমরা সসীম সংখ্যার কথাই বলছি। অর্থাৎ এই সেট দুই প্রান্তে বদ্ধ নয়, তাহলে এই সেটের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি

$$|x| > N, \ x \in S,$$

(N যত বড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই হোক না কেন)

2.06 ক্রম :—প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে সেটের বস্তুগুলির মধ্যে যখন আমরা কোনটি প্রথম বস্তু, কোনটি দ্বিতীয় বস্তু, কোনটি তৃতীয় বস্তু……এরূপ বুঝতে পারবো তখন সেই সেটকে ক্রম (sequence) বলব। 2.04—অনুচ্ছেদের গণনীয় সেটের সংজ্ঞার মাধ্যমে বলা যায়, যে সেট গণনীয় বা গনিতব্য (enumerable) সেই সেটই ক্রম অর্থাৎ A যদি একটি গণনীয় সেট হয় তবে তার বস্তুগুলির সঙ্গে স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের নিম্নলিখিত এক এক সম্বন্ধ বিদ্যমান ;

$$1 \leftrightarrow a_1, \quad 2 \leftrightarrow a_2, \quad 3 \leftrightarrow a_3, \ \cdots \text{ইত্যাদি।}$$

অতএব $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n, \cdots\}$.

তাহালে সহজেই বুঝা যায় সকল ক্রমই সেট, কিন্তু সকল সেটই ক্রম নয়। ক্রমের বস্তুগুলি যদি $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ হয় তবে সেই সেটকে সংক্ষেপে লেখা হয় $\{a_n\}$, যেখানে ক্রমের সাধারণ (বা n-তম) বস্তু a_n এবং এই সাধারণ বস্তু থেকে সব বস্তুগুলি পাওয়া যায় যথাক্রমে $n = 1, 2, \cdots$ বসিয়ে।

উদাহরণ :—

$$\text{মনে কর } \{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

প্রথমে $n = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায় $a_1 = \frac{1}{2}$,

পরে $n = 2$ বসিয়ে পাওয়া যায় $a_2 = \frac{2}{3}$,

$n = 3$ বসিয়ে পাওয়া যায় $a_3 = \frac{3}{4}$, ইত্যাদি।

তাহলে এই ক্রমের বস্তুগুলি যথাক্রমে

$$\tfrac{1}{2}, \ \tfrac{2}{3}, \ \tfrac{3}{4}, \ \tfrac{4}{5}, \ \tfrac{5}{6}, \cdots$$

যেহেতু $n = 1, 2, 3, \cdots$, অতএব $n < n + 1$, অর্থাৎ $\frac{n}{n+1} < 1$. তাহলে দেখা যায় এই ক্রমের বস্তুগুলি 1 অপেক্ষা ছোট এবং স্পষ্টতঃ বস্তুগুলি 0 অপেক্ষা বড়। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$0 < a_n < 1 \ ; \quad n = 1, 2, \cdots.$$

ক্রমের প্রান্ত : যেহেতু প্রত্যেক ক্রমই একটি সেট, ক্রমের প্রান্তের ধারনা সেটের প্রান্তের ধারনা থেকেই আসতে পারে। অতএব সেটের প্রান্তের বিশেষ ধর্মের (2·05 অনুচ্ছেদ দেখ) সাহায্যে ক্রমের প্রান্তের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যেতে পারে :

সংজ্ঞা : যদি $\{a_n\}$ এমন একটি ক্রম হয় যা উচ্চপ্রান্তে বদ্ধ (bounded above) তাহলে M এই ক্রমের লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্ত (ল. উ. প্রা.) হবে যদি

1) $a_n \leqslant M$; $n = 1, 2, \cdots$

2) প্রতি $\epsilon > 0$ এর জন্য অন্ততঃ একটি সংখ্যা $a_m \in \{a_n\}$ বিদ্যমান থাকে যেখানে $M - \epsilon < a_m$ এই অসমতা সিদ্ধ হয়।

সংজ্ঞা : যদি $\{a_n\}$ এমন একটি ক্রম হয় যা নিম্নপ্রান্তে বদ্ধ (bounded below) তাহলে m এই ক্রমের গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত (গ. নি. প্রা.) হবে যদি

1) $a_n \geqslant m$; $n = 1, 2, \cdots$

2) প্রতি $\epsilon > 0$ এর জন্য অন্ততঃ একটি সংখ্যা $a_k \in \{a_n\}$ আছে যেখানে $m + \epsilon > a_k$ এই অসমতাটি প্রযোজ্য।

উদাহরণ :—

1) $\{-n\}$ ক্রমটি উচ্চ প্রান্তে বদ্ধ

2) $\{n\}$ ক্রমটি নিম্ন প্রান্তে বদ্ধ

3) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ক্রমটি উভয় প্রান্তে বদ্ধ,

$$\text{কারণ } 0 < \frac{n}{n+1} < 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

মন্তব্য : (i) যে ক্রম উভয় প্রান্তে বদ্ধ তাকে শুধু প্রান্ত বদ্ধ বলা হয়। একটি প্রান্ত বদ্ধ ক্রমের লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত বা গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্ত ক্রমের বস্তু নাও হতে পারে।

উদাহরণ স্বরূপ মনে কর $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; এখানে গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত '0', কিন্তু $0 \notin \{a_n\}$, আবার এই ক্রমের লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত '1', কিন্তু $1 \in \{a_n\}$.

(ii) যে ক্রম $\{a_n\}$ উভয় প্রান্তে বদ্ধ, তাকে নিম্নলিখিত অসমতা চিহ্নের সাহায্যে লেখা যেতে পারে

$$|a_n| < K.$$

একদিষ্ট ক্রম (Monotone sequence)

একটি ক্রম $\{a_n\}$ যদি এমন হয় যে $a_n \leqq a_{n+1}$; $n=1,2,\ldots$ অর্থাৎ $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant \cdots$, তাহলে সেই ক্রমকে **একদিষ্ট** (বা একান্বয়ী) **আরোহী ক্রম** (monotone increasing sequence) বলে। অনুরূপভাবে যদি $a_n \geqslant a_{n+1}$; $n=1, 2,\cdots$ অর্থাৎ $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots$ হয় তবে সেই ক্রমকে **একদিষ্ট অবরোহী ক্রম** (monotone decreasing sequence) বলে। যখন এইরূপ সংজ্ঞায় সমতা চিহ্নগুলি থাকে না, তখন সেই ক্রমকে **যথাযথ বা যথার্থ** (Strictly) একদিষ্ট (বা একান্বয়ী) ক্রম বলে।

উদাহরণ :—(1) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ক্রমটি যথাযথ একদিষ্ট আরোহী ক্রম।

(2) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ ক্রমটি যথাযথ একদিষ্ট অবরোহী ক্রম।

কয়েকটি বিশিষ্ট ধরণের ক্রম :

ক্রমের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে স্বাভাবিক সংখ্যার সেটের সঙ্গে যদি এমন একটি নিয়ম বা অনুরূপতা (correspondence) বিদ্যমান থাকে যার দ্বারা স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি বাস্তব সংখ্যার একটি উপসেটে রূপান্তরিত হয়, তাহলে এরূপ নিয়ম বা অনুরূপতা একটি বাস্তব ক্রমের (Real sequence) সৃষ্টি করে। কিন্তু এই নিয়মটি বা অনুরূপতাটি কি ? ইহার সহজ ব্যাখ্যা দেওয়াও সম্ভব নয়। তবে উপরোক্ত ক্রমের উদাহরণগুলিতে দেখা যায় যে এই নিয়মটি ক্রমের সাধারণ বস্তুর (a_n এর) একটি সূত্র সঙ্কেত (formula) মাত্র। কিন্তু প্রত্যেক ক্রমের যে এরূপ একটি সূত্র সঙ্কেত থাকবেই এরূপ বলা যায় না। যেমন মনে কর একটি নিয়ম বা অনুরূপতা এমন আছে যার দ্বারা প্রতি স্বাভাবিক সংখ্যা n এর অনুরূপ সেই সব স্বাভাবিক সংখ্যা যারা n এর চেয়ে ছোট এবং n এর সঙ্গে পরস্পর মৌলিক তাদের সেট। এরূপ একটি নিয়ম দ্বারা যে ক্রমের উৎপত্তি হয় তার বস্তুগুলি নিচের সারণীতে (table) দেখানো হল :

n	n এর ছোট আপেক্ষিক মৌলিক স্বাভাবিক সংখ্যা	a_n এর সংখ্যা
1	—	0
2	1	1
3	1, 2	2
4	1, 3	2
5	1, 2, 3, 4	4
6	1, 5	2
7	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
8	1, 3, 5, 7	4
......	....	....

উপরোক্ত সারণী থেকে আলোচ্য ক্রমের সাধারণ বস্তুকে n এর মাধ্যমে লেখা এক অসম্ভব ব্যাপার অর্থাৎ এরূপ ক্রমের সাধারণ বস্তুর মূল সংকেত নাই। এই ক্রমের সঙ্গে যে নিয়ম বা অনুরূপতা বর্তমান তাকে **n এর অয়লার নির্দেশক** (Euler indicator) বলা হয়।

অন্যরূপ ক্রম :

$$\left.\begin{aligned} \text{মনে কর} \quad a_{2n-1} &= \frac{1}{n} \\ \text{এবং} \quad a_{2n} &= \frac{n-1}{n} \end{aligned}\right\}$$

উপরোক্ত ক্রমের মূল সংকেত দুভাগে ভাগ করে লেখা হয়েছে—a_2, a_4, a_6, ... এর জন্য একটি মূল সঙ্কেত এবং a_1, a_3, a_5, ... এর জন্য অন্য একটি মূল সঙ্কেত। এই ক্রমের বস্তুগুলি যথাক্রমে

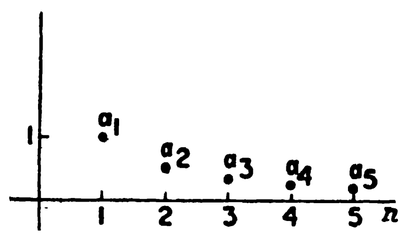
$$1,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \ldots\ldots$$

অতএব ক্রমের মূল সঙ্কেত একটির বেশীও হতে পারে।

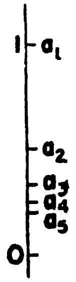
ক্রমের লেখচিত্র :

মনে কর $a_n = \dfrac{1}{n}$

n এর মানগুলিকে অনুভূমিক অক্ষরেখায় রেখে এবং a_n এর মানগুলিকে উল্লম্ব অক্ষরেখার সমান্তরাল রেখায় অবস্থিত মনে করে নিম্নলিখিত লেখচিত্র অঙ্কন করা যেতে পারে :



উপরোক্ত লেখচিত্রে দুটি অক্ষরেখা ধরা হয়েছে; কিন্তু ক্রমের লেখচিত্রে কেবলমাত্র ক্রমের বস্তু-গুলির স্থান দেখানো যথেষ্ট বলে অনেকে ক্রমের বস্তুগুলির মান কেবল একটি উল্লম্ব রেখায় স্থাপন করে লেখচিত্র অঙ্কন করেন। উপরোক্ত ক্রমের লেখচিত্র নিম্নরূপ হতেও পারে :



যে কোন একটি লেখচিত্র থেকে আমরা সহজেই বুঝতে পারি যে ক্রমের সংখ্যাগুলি ক্রমাগত ছোট হচ্ছে। প্রথম চিত্রে a_n এর অনুরূপ বিন্দুগুলি n-অক্ষরেখার যত কাছে সম্ভব যাবার চেষ্টা করছে। দ্বিতীয় চিত্রেও a_n এর অনুরূপ বিন্দুগুলি উপরদিক থেকে নীচে নামতে নামতে '0' এর যত কাছে সম্ভব নামবার চেষ্টা করছে। ক্রমের বস্তুগুলির এই ধরণের প্রবণতা ক্রমের সীমা নির্ধারণের পক্ষে খুব অনুকূল। ক্রমের সীমা নির্ধারণের কথা পরের অধ্যায়ে বিশদভাবে বলা হবে। যে ক্রমের সীমা থাকে বা ক্রমের বস্তুগুলি এক সীমার কাছে পৌঁছায় তাকে অভিসারী (convergent) ক্রম, অন্যথায় অপসারী (divergent) ক্রম বলে।

উদাহরণ :—

মনে কর $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$ একটি **সরল অবিরত ভগ্নাংশ,** যেখানে

a_1, a_2, a_3, ... সংখ্যাগুলি স্বাভাবিক সংখ্যা।

এখন a_1, $a_1+\dfrac{1}{a_2}$, $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}$, ... সংখ্যাগুলি একটি ক্রম তৈরী করে। এখানে a_1, a_2, ... ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এই ধরণের অবিরত ভগ্নাংশের বিশেষ ধর্ম হিসাবে বলা যেতে পারে যে এর একটি নির্দিষ্ট মান (x) আছে অর্থাৎ এরূপ সরল অবিরত ভগ্নাংশ মাত্রেই অভিসারী (convergent)। এখন যাদের এই সরল অবিরত ভগ্নাংশের ধারণা কিছুটা আছে তাদের নিশ্চয়ই জানা আছে যে

(1) $\dfrac{p_1}{q_1}$, $\dfrac{p_3}{q_3}$, $\dfrac{p_5}{q_5}$, ... একটি যথাযথ একদিষ্ট আরোহী ক্রম,

(2) $\dfrac{p_2}{q_2}$, $\dfrac{p_4}{q_4}$, $\dfrac{p_6}{q_6}$, ... একটি যথাযথ একদিষ্ট অবরোহী ক্রম,

যেখানে $\dfrac{p_n}{q_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\dfrac{1}{a_n}$,

(3) $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}<x$,

(4) $p_{2n}/q_{2n}>x$.

2.07 শ্রেণী

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে ক্রম (sequence) এবং শ্রেণীর (series) মধ্যে একটা পারস্পরিক সম্পর্ক আছে।

মনে কর $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots$ একটি শ্রেণী।

এই অসীম শ্রেণীর যোগফলের অর্থ কি? কোন সাধারণ মানুষের পক্ষেই অসীম শ্রেণীর বীজগাণিতিক অর্থে যোগ করা সম্ভব নয়। তবে এরূপ যোগফলের অর্থ কি? এর যুক্তিসঙ্গত অর্থ নিম্নরূপে দেওয়া যায়:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$$

তাহলে $\{s_n\}$ একটি ক্রম এবং প্রত্যেকটি শ্রেণীর সহিত এরূপ একটি ক্রম ওতোপ্রোত-ভাবে জড়িত। শ্রেণীর কিছু আলোচনা করতে হলে শ্রেণীর অনুরূপ ক্রমের আলোচনা প্রয়োজন। যেমন—শ্রেণীটির যোগফল আছে, কি নেই, জানতে হলে শ্রেণীর অনুরূপ ক্রমের সীমার আলোচনা করতে হয়। ক্রমের সীমার কথা সঠিকভাবে যদিও পরের অধ্যায়ে আলোচিত হবে, তবুও এখানে সীমার কথা একটু অনুসন্ধানমূলকভাবে বলা হবে। $\{s_n\}$ ক্রমটিকে শ্রেণীর আংশিক যোগফলের ক্রম (sequence of partial sums) বলে।

শ্রেণী প্রধানত তিন প্রকারের—(১) অভিসারী (convergent) শ্রেণী, (২) অপসারী (divergent) শ্রেণী, (৩) দোলায়মান (oscillatory) শ্রেণী।

প্রথমে একটি অভিসারী শ্রেণীর উদাহরণে আসা যাক। মনে কর

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots$$

ইহা একটি গুণোত্তর শ্রেণী। আমরা জানি এর যোগফল $= \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

এখানে এই শ্রেণীটি অভিসারী। এই শ্রেণীর আংশিক যোগফলের ক্রম

$$1,\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{7}{4},\ \cdots\cdots$$

অর্থাৎ $\{s_n\} = 1 + \frac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} = 2(1 - 2^{-n})$

তাহলে দেখা যায় $s_1 = 2(1-\frac{1}{2})$, $s_2 = 2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$, $s_3 = 2\left(1-\frac{1}{2^3}\right)$ ……

এইভাবে $s_{999} = 2\left(1-\frac{1}{2^{999}}\right)$……অতএব বন্ধনীর মধ্যে দ্বিতীয় পদটি খুব ছোট হতে হতে শূন্যের কাছে পৌঁছাচ্ছে। এজন্য অনন্ত শ্রেণীটির যোগফলের ধারণা করা যাচ্ছে, সেজন্য এই শ্রেণীটির ক্ষেত্রে অভিসারী নামটি যথার্থ।

দ্বিতীয়তঃ $1+1+1+1+$……শ্রেণীটি কি অভিসারী ?

দেখা যাক এর আংশিক যোগফলের ক্রমটি কি রকম। এখানে

$$s_1 = 1,\ s_2 = 2,\ s_3 = 3,\ s_4 = 4,\ \ldots\ldots$$

অতএব শ্রেণীটির আংশিক যোগফলের ক্রমটি স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রম। কিন্তু আমরা জানি স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমের উচ্চ প্রান্ত নেই অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা বড় হতে হতে বৃহত্তম সংখ্যার হদিশ মেলে না। তাহলে এই শ্রেণীটির যোগফল সবচেয়ে বড় স্বাভাবিক সংখ্যা অর্থাৎ শ্রেণীটির যোগফল কোন সসীম স্বাভাবিক সংখ্যা নয়। সেহেতু শ্রেণীটি অপসারী।

তৃতীয়তঃ $1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী বা অপসারী নয়। কারণ জোড়সংখ্যকে পদ পর্যন্ত যোগ করলে যোগফল '0' হয়, আবার বিজোড়সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগ করলে যোগফল 1 হয়। তাহলে শ্রেণীটির যে কোন পদ পর্যন্ত যোগ করলে যোগফল হয় '0' বা 1। সুতরাং এই (অনন্ত) শ্রেণীর যোগফল একটিমাত্র সসীম সংখ্যা নয়, সুতরাং ইহা অভিসারী নয়। আবার এর যোগফল যে সসীম সংখ্যা নয় তাও নয়, অতএব একে অপসারীও বলা যায় না। যেহেতু এর যোগফল একবার '0' এবং আর একবার '1', সেহেতু এই শ্রেণীকে **দোলায়মান শ্রেণী** বলা হয়।

উপরোক্ত উদাহরণ সাহায্যে বিভিন্ন শ্রেণীর কথা বলা হল। অভিসারী, অপসারী বা দোলায়মান শ্রেণীর যথাযথ সংজ্ঞা দিতে হলে ক্রমের সীমার কথা এসে যায় বলে এ অধ্যায়ে যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া গেল না।

উদাহরণ :—

(1) $1+r+r^2\cdots\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী যখন $|r| < 1$, শ্রেণীটি অপসারী যখন $|r| \geqslant 1$, শ্রেণীটি সসীম সংখ্যায় দোলায়মান যখন $r = -1$, এবং শ্রেণীটি অসীম সংখ্যায় দোলায়মান যখন $r < -1$.

(2) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$ শ্রেণীটির প্রথম পদ $(u_1)=\frac{1}{1\cdot2}$, দ্বিতীয় পদ $(u_2)=\frac{1}{2\cdot3}$, তৃতীয় পদ $(u_3)=\frac{1}{3\cdot4}$, n-তম পদ $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

এখন $u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

অতএব

$$u_1=1-\tfrac{1}{2}$$
$$u_2=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}$$
$$u_3=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$
$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

যোগ করে আমরা পাই

$$u_1+u_2+\cdots+u_n=1-\frac{1}{n+1}$$

অর্থাৎ $s_n=\frac{n}{n+1}$

অতএব শ্রেণীটির আংশিক যোগফলের ক্রম $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$। আমরা পূর্বেই লক্ষ্য করেছি যে এই ক্রম উচ্চপ্রান্তে এবং নিম্নপ্রান্তে বদ্ধ এবং এই ক্রম একটি যথাযথ একদিষ্ট আরোহী ক্রম। কিন্তু শ্রেণীটি অভিসারী কিনা আলোচনা করতে হলে ক্রমের সীমা আলোচনা করতে হয়। সেজন্য শ্রেণীটির সহিত ক্রমের সম্পর্ক সম্বন্ধে আর কিছু বলা যেতে পারে না। শুধু এইটুকু বলা যায় যে একদিষ্ট ক্রম উভয় প্রান্তে বদ্ধ হলে অনুরূপ শ্রেণটি অভিসারী হইবে। অন্যভাবে লক্ষ্য করা যায়

$$\frac{1}{s_1}=1+\frac{1}{1},\ \frac{1}{s_2}=1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{s_3}=1+\frac{1}{3}\cdots\cdots$$

এইভাবে $\frac{1}{s_{9999}}=1+\frac{1}{9999}$;

অতএব দ্বিতীয় পদটি ক্রমাগত ছোট হতে হতে শূন্যের কাছে পৌঁছাচ্ছে। এজন্য এই

অনন্ত শ্রেণীর যোগফলের ধারণা করা যাচ্ছে অর্থাৎ যখন n ক্রমাগত বড় হচ্ছে তখন $\frac{1}{s_n}$ ক্রমাগত 1 এর কাছে পৌঁছাচ্ছে ; প্রতীক চিহ্নের মাধ্যমে বলা যায় যখন $n \to +\infty$ তখন $s_n \to 1$.

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \text{ শ্রেণীর সঙ্কেত চিহ্ন } \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

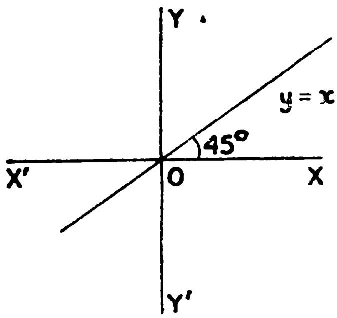
2.08 ফাংশন

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে দুইটি চলরাশির (x এবং y) মধ্যে যদি y চলরাশির মান x চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে, তাহলে y চলরাশিকে x চলরাশির ফাংশন বলে। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয় $y=f(x)$। বিখ্যাত গাণিতিক টিচমার্শ (Titchmarsh) এর জনপ্রিয় সংজ্ঞার মাধ্যমে বলা যায় f যেন একটি যন্ত্র, x তার কাঁচামাল এবং y তার উৎপাদন। যেমন $y=2x$ হলে, x এর একটি মান ডানদিকে দিলে, বামদিক থেকে y এর অনুরূপ মান পাওয়া যায় ; অর্থাৎ যখন $x=1$, তখন $y=2$; যখন $x=\frac{1}{2}$, তখন $y=1$; $x=\sqrt{2}$, তখন $y=2\sqrt{2}$; ইত্যাদি। আবার কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে তাপাংক যখন ধ্রুবক থাকে তখন গ্যাসের আয়তন উহার চাপের একটি ফাংশন ; পুনরায় চাপ যখন ধ্রুবক থাকে তখন গ্যাসের আয়তন উহার তাপাংকের একটি ফাংশন। গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের ফাংশন।

প্রাথমিক মন্তব্যে আরও বলা হয়েছে যে ফাংশনের ধারণায় স্বাধীন চলরাশির (অর্থাৎ x এর) একটি অঞ্চল বা এলাকা উল্লেখ না করলে ফাংশন সুস্পষ্টভাবে প্রকাশিত হয় না। যেমন $y=\frac{1}{x}$ ফাংশনটি কোন্ এলাকায় বর্ণিত ? কারণ x এর অঞ্চলের মধ্যে যদি শূন্য (0) থাকে তবে এই ফাংশনটি ঠিকমত বর্ণিত হয় না। আবার $y=\operatorname{cosec} x$ বললে x এর অনেক মান আছে (যেমন $x=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\cdots$) যেখানে ফাংশনটি সুস্পষ্টভাবে বর্ণিত নয়। অধিকন্তু $y=f(x)$ বলার সময় যদি x এর অঞ্চল বর্ণনা করা না হয়, তবে ফাংশনটির আলোচনা কোন্ অঞ্চলে করা হচ্ছে বুঝা যায় না ; কারণ x চলরাশি তো অনন্ত বাস্তব অক্ষরেখায় বিচরণশীল এবং বিচরণকালে x সমস্ত বাস্তব সংখ্যার (বা বিন্দুর) মধ্য দিয়ে অবিরাম ভাবে পরিবর্তনশীল।

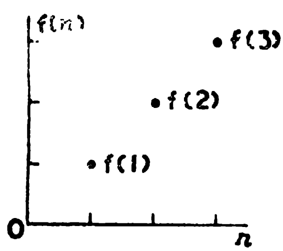
এখন ফাংশনের কতকগুলি সহজ উদাহরণ দেওয়া হবে।

উদাহরণ 1. মনে কর $y=f(x)$ এবং $f(x)=x$; এখানে x যে কোন বাস্তব সংখ্যার মান ধারণ করলে y এর মান পাওয়া যায়, অতএব x এর অঞ্চল সমস্ত



বাস্তব অক্ষরেখা। $y=x$ এর লেখচিত্র লক্ষ্য করলে বুঝা যায় এমন কোন বাস্তব সংখ্যা x নেই যার অনুরূপ y ঠিকমত সংজ্ঞিত বা বর্ণিত নয় অর্থাৎ প্রতি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞিত।

উদাহরণ 2. মনে কর $y=f(n)$ এর $f(n)=n$;
এখানে ফাংশনটির স্বাধীন চলরাশি (অর্থাৎ n) x চলরাশির মত সমস্ত বাস্তব বাংখ্যা ধারণ করে না। সুতরাং $f(x)=x$ এবং $f(n)=n$ দুটি বিভিন্ন ফাংশন। প্রথমটিতে x যে কোন বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, কিন্তু দ্বিতীয়টিতে n শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধারণ করে। $f(x)=x$ একটি বাস্তব চলরাশির ফাংশন এবং $f(n)=n$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ফাংশন। এই উদাহরণে $n=1$ হলে $f(1)=1$, $n=2$ হলে



$f(2)=2$, ইত্যাদি। এই ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে $n=1, 2, 3\cdots$ নিতে হবে ; তাহলে উদাহরণ 1 এর মত উদাহরণ 2-এ ফাংশনটির লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন লেখ নয় অর্থাৎ $f(n)=n$ এর লেখচিত্র বিচ্ছিন্ন বিন্দুসমূহের সংগ্রহ এবং এই সব বিন্দু $y=x$ সরলরেখার প্রথম পাদে সমদূরত্বে অবস্থিত।

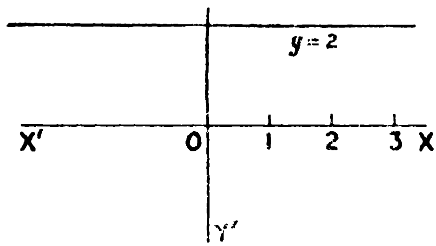
মন্তব্য ঃ উদাহরণ 2 থেকে সহজেই বুঝা যায় যে প্রত্যেক ক্রমকে ফাংশন-আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$f(n) \equiv a_n,$$

যেখানে $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2 \cdots\cdots$ ইহাই ফাংশনের সবচেয়ে সহজতম রূপ। ক্রম এবং শ্রেণীর আংশিক যোগফলের ক্রম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার চলরাশির ফাংশন।

উদাহরণ 3. মনে কর $f(x) = 2$; ইহা কি একটি ফাংশন ?

লক্ষ্য করা যায় ডানদিকে কোন x চলরাশি নাই ; ডানদিকের রাশিটি ধ্রুবক। $f(x) = 2$ দেওয়া থাকলে মনে করতে হবে প্রতি বাস্তব চলরাশির মানের জন্য $f(x)$ এর মান 2 ; অতএব $f(x) = 2$, x বাস্তব চলরাশির একটি ফাংশন। $y = 2$



এর লেখচিত্র লক্ষ্য করলে বুঝা যায় প্রতি x এর মানের জন্য y বা $f(x)$ এর মান সংজ্ঞিত।

উদাহরণ 4. মনে কর $f(n) = 2$

এখানে যেহেতু স্বাধীন চলরাশিটি n, সেহেতু $n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$, তাহলে উপরোক্ত লেখচিত্রের উপর $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $\cdots\cdots$ বিন্দুগুলি বর্তমান ফাংশনের লেখচিত্র। লক্ষ্য করার বিষয় ফাংশনটিকে ক্রমের মাধ্যমে লিখলে পাওয়া যায়

$$f(1) = a_1 = 2, \; f(2) = a_2 = 2, \; \cdots\cdots$$

অতএব বর্তমান ফাংশনটির ক্রম নিম্নরূপ ঃ—

$$2, 2, 2, \cdots\cdots$$

অর্থাৎ ক্রমটি একটি মাত্র সংখ্যা 2 দ্বারা গঠিত।

উদাহরণ 5. মনে কর $f(x) = \dfrac{1}{x}$; পূর্বেই বলা হয়েছে এই ফাংশনটির x এর অঞ্চলের মধ্যে $x = 0$ থাকতে পারে না অর্থাৎ শূন্য বাদে সমস্ত বাস্তব অক্ষরেখায় ফাংশনটি বর্ণিত। $f(x) = y$ লিখলে আমরা পাই

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{অর্থাৎ} \quad xy = 1.$$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে $xy = 1$ এর লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত $\left(\text{যখন } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right.$ এই পরাবৃত্তের সমীকরণকে উহার দুইটি অভিসারকের সরলরেখাকে অক্ষ ধরে পরিবর্তিত করা হয় তখন পরাবৃত্তের সমীকরণ হয় $\left. xy = \frac{a^2 + b^2}{4} \right)$ ।

উদাহরণ 6. মনে কর $f(n) = \frac{1}{n}$

এখানে লক্ষ্য করা যায় $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}$, ... অতএব n যত বাড়ে $f(n)$ তত কমে । n বাড়তে বাড়তে যখন $+\infty$ কাছে যায়, তখন $f(n)$ কমতে কমতে '0' কাছে যায় ; এই ধারণা থেকেই সীমার কথা আসে । প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$\text{যখন } n \to +\infty, \quad \text{তখন } f(n) \to 0\,;$$

যদিও সীমার কথা আমরা বিস্তারিতভাবে পরের অধ্যায়ে আলোচনা করব, তবুও কিছু কিছু সীমার প্রারম্ভিক ধারণা এখানে দেওয়া হল । এখানে $f(n) \to 0$ কথাটি বুঝাইবার জন্য নিম্নলিখিত অসমতাগুলি লক্ষ্য করা ভাল ঃ—

$$f(n) = \frac{1}{n} < \cdot 001, \text{ যদি } n > 1000$$

$$f(n) = \frac{1}{n} < \cdot 0001, \text{ যদি } n > 10000$$

$$f(n) = \frac{1}{n} < \cdot 00001, \text{ যদি } n > 1000{,}00$$

$$f(n) = \frac{1}{n} < \cdot 000001, \text{ যদি } n > 1000000$$

উদাহরণ 7. মনে কর $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$.

এখানে $f(1) = 0$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{2}{3}$, ... $f(999) = \frac{998}{999}$, ...ইত্যাদি

অতএব $f(n) \to 1$, যখন $n \to +\infty$.

উদাহরণ 8. মনে কর $f(n) = (\sin n\,\theta\,\pi) \,/\, n$, যেখানে θ বাস্তব

এখন $|f(n)| \leqslant \frac{1}{n}$, যেহেতু $|\sin n\,\theta\,\pi| \leqslant 1$.

যেহেতু $\frac{1}{n} \to 0$, যখন $n \to \infty$; $f(n) \to 0$, যখন $n \to \infty$.

উদাহরণ 9. যদি $f(n)=\frac{1}{n}$ এবং $g(n)=1+\frac{1}{n}$ হয়, তবে

$$f(n) < g(n) : \quad n=1, 2, \cdots \cdots \cdots$$

কারণ $\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{n}$

এখন $\frac{1}{n} \to 0$, যখন $n \to \infty$; অতএব $f(n) \to 0$ এবং

$g(n) \to 1$, যখন $n \to \infty$

উদাহরণ 10. মনে কর $f(n)=\frac{n^2+n+3}{5n^2+4n+1}$

$$\therefore \quad f(n)=\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

যেহেতু $\frac{1}{n} \to 0$ এবং $\frac{1}{n^2} \to 0$, যখন $n \to \infty$;

সেহেতু $f(n) \to \frac{1}{5}$.

উদাহরণ 11. যদি $y=f(x)+\sin x\pi$, তবে যখন

$x=n$, তখন $y=f(n)$, কারণ $\sin n\pi=0$.

উদাহরণ 12. যদি $y=\frac{x}{n}$, তাহলে যখন $n=\infty$, তখন

$y=0 \equiv \phi(x)$; অর্থাৎ যখন $n \to \infty$, তখন

y চলরাশি x চলরাশির একটি ফাংসন $\phi(x) \equiv 0$.

উদাহরণ 13. যদি $y=\frac{x^n}{x^n+1}$ হয়, তবে যখন $n \to \infty$,

তখন $y=0$, যদি $-1 < x < 1$; $y=\frac{1}{2}$, যদি $x=1$;
$y=1$, $x < -1$, অথবা $x > 1$; আবার y বর্ণিত হয় না
যখন $x=-1$.

উদাহরণ 14. যদি $y=x^{\phi(n)}$ এবং $\phi(n) \to \infty$ যখন $n \to \infty$, তবে
$y=0$, যদি $-1 < x < 1$; $y=+\infty$, যদি $x > 1$ এবং
$y=1$, যদি $x=1$; যখন $n \to \infty$.

বিবিধ অনুশীলনী 2

1. নিম্নলিখিত অন্তরালগুলিকে সেট আকারে লেখ :—

$(1, 2)$; $[-1, 1]$; $(0, 1]$; $[-1, 0)$

2. যদি $A = \{x \mid 0 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 5\}$ এবং $C = \{x \mid 4 \leqslant x \leqslant 10\}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে একটি সেটে লেখ :

(i) $A \cup B$

(ii) $A \cap B$

(iii) $B \cup C$

(iv) $B \cap C$

(v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $A \cap (B \cup C)$

(vii) $(A \cap B) \cap B$,

(viii) $(A \cap B) \cup A$,

x বাস্তব সংখ্যার প্রতীক।

3. সেটের ধারণার সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্নের সমাধান কর ঃ

একটি বিদ্যালয়ে 550 জন ছাত্রের মধ্যে 290 জন বাংলা পড়ে, 200 জন হিন্দী পড়ে, এবং 80 জন বাংলা বা হিন্দী কোন বিষয়ই পড়ে না। কতজন বাংলা এবং হিন্দী উভয় বিষয় পড়ে ? [উত্তর 20]

[সঙ্কেত ঃ যদি $n(A) = A$ সেটের বস্তু সংখ্যা হয়, তবে

$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$]

4. যদি $A \cap X = A \cap Y$ এবং $A \cup X = A \cup Y$ হয়, তবে প্রমাণ কর $X = Y$.

5. নিম্নলিখিত সেট দুইটির লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্ত এবং গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত নির্ণয় কর ঃ

(i) $2, \ -1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{4}{3}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{5}{4}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots\ldots$

(ii) $\frac{2}{3}, \ -\frac{3}{4}, \ \frac{4}{5}, \ -\frac{5}{6}, \ \frac{6}{7}, \ -\frac{7}{8}, \ \ldots\ldots$

6. নিম্নলিখিত ক্রমটির প্রথম পাঁচটি বস্তু লেখ ঃ

$$\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} - \log n\right\}$$

দেখাও যে উপরোক্ত ক্রমটি একদিষ্ট অবরোহী।

7. নিম্নলিখিত ক্রমটি কি একদিষ্ট ?

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \cdots\cdots$$

8. নিম্নলিখিত ক্রমটির প্রথম পাঁচটি বাস্তব মান নির্ণয় কর :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

9. যদি $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)}$ হয়, তবে দেখাও যে $\{a_n\}$ একদিষ্ট আরোহী ক্রম।

প্রমাণ কর $0 < a_n < 1$; $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

10. নিম্নলিখিত শ্রেণীর আংশিক যোগফলের ক্রম নির্ণয় কর :

$$1 + r + r^2 + \cdots\cdots$$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ হয়, তবে শ্রেণীটির প্রথম পাঁচটি পদ নির্ণয় কর।

দেখাও যে $|u_{n+1}| < |u_n|$.

12. দেখাও যে নিম্নলিখিত সেটটি গণনীয়

$$\left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{8}, \cdots\cdots\right\}$$

13. নিম্নলিখিত ফাংশন দুইটির প্রভেদ দেখাও :

$$f(x) = x^2, \quad f(n) = n^2$$

14. নিম্নলিখিত ফাংশনটিকে ফাংশন বলার সার্থকতা বিচার কর :

$$f(x) = 5$$

15. দেখাও যে

$$f(n) = \frac{1}{n} < \cdot 0000001, \text{ যখন } n = 1234567$$

16. দেখাও যে

$$\frac{n^2+1}{n^2-1} \to 1, \quad \text{যখন } n \to \infty.$$

17. যদি $y = \frac{1}{1+x^{2n}}$, দেখাও যে যখন $n \to \infty$, $y = 1$, $|x| < 1$ হইলে ; $y = \frac{1}{2}$, $|x| = 1$; এবং $y = 0$, $|x| > 1$

18. যদি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots$ হয়, তবে দেখাও যে

$$u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

শ্রেণীটি কি অভিসারী ?

19. বাস্তব চল এর সংজ্ঞা দাও। বাস্তব চলের ফাংশন বলতে কি বুঝায় ?

20. ক্রম ও শ্রেণীর পারস্পরিক সম্পর্ক আলোচনা কর।

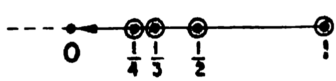
তৃতীয় অধ্যায়

সেট ও ক্রমের সীমা
অভিসারী ও অপসারী শ্রেণী

3.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

সীমার ধারণা কলনবিদ্যায় একটি বিশেষ মূলগত ধারণা। সীমা নির্ধারণ ব্যতিরেকে কলনবিদ্যার কোন কিছুই আলোচনা করা সম্ভবপর নয়। সেজন্য সেটের সীমা, ক্রমের সীমা, শ্রেণীর আংশিক যোগফলের ক্রমের সীমা এই অধ্যায়ে খুব সহজে আলোচনা করা হবে। দ্বিতীয় অধ্যায়ে সেট, অখণ্ড চলের (যে চলের মান কেবল মাত্র ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয় তার) ফাংশন এবং শ্রেণীর কথা বলা হয়েছে। সেখানে সেট, ক্রম, ফাংশন এবং শ্রেণীর ধর্ম আলোচনা করতে যাবার সময়ে সীমার কথা এসেছিল। তাই 'সীমা' কথাটির ব্যাখ্যা প্রয়োজন। এখানে এই সীমার ধারণা সাধারণ ভাবে সবিস্তারে আলোচনা করা হবে। শ্রেণীর ধারণা মূলতঃ সীমার ধারণার উপর নির্ভরশীল। কাজেই শ্রেণীর বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

সেটের সীমা : সেটের সীমা কথাটির ব্যাখ্যা সহজ করার জন্য একটি উদাহরণের সাহায্য লওয়া হল। ধর $\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} ; \cdots \}$ একটি সেট। এই সেটের বস্তুগুলি ধনাত্মক এবং ক্রমশ ছোট হতে হতে কোন্ সংখ্যার কাছে পৌঁছায়, এই ধারনা থেকেই সীমার ধারণা আসে ; সেটের বস্তুগুলি $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \cdots \frac{1}{1000}, \cdots \cdots \frac{1}{10000} \cdots \cdots$ ইত্যাদি, তাহলে দেখা যাচ্ছে বস্তুর হরের মান ক্রমাগত বাড়ছে এবং সঙ্গে সঙ্গে বস্তুর মান ক্রমাগত কমছে ; বস্তুগুলির মানের পরিণতি হিসাবে বলা যায় খুব ছোট, আরও ছোট, আরও ছোট, তার চেয়ে ছোট, ইত্যাদি ; কিন্তু বস্তুগুলির মান ধনাত্মক ; তাহলে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অন্যোনক (reciprocal) যে সংখ্যার কাছে পৌঁছায় সেই সংখ্যাটি **সেটের সীমা** (Limit) অর্থাৎ এই সেটের সীমা 0 (শূন্য)। লক্ষ্য করা উচিত কোন বস্তুর মান কখনই শূন্য হবে না।



উপরোক্ত অনুচিত্র থেকে বুঝা যায় সেটের বস্তুগুলির 0 (শূন্য) এর যত কাছে সম্ভব

যাবার চেষ্টা করছে, কিন্তু শূন্যকে অতিক্রম করে কোন ঋণাত্মক সংখ্যার মান ধারণ করতে পারে না। অতএব সেটের বস্তুগুলির সীমা শূন্য। এখন সেটের সীমাকে একটু গাণিতিক উপায়ে বলার চেষ্টা করা হবে। শূন্যকে নিয়ে যত ছোটই একটু সরলরেখা লওয়া হউক না কেন, যেমন মুক্ত অন্তরাল $\left(-\frac{1}{১১১}, \frac{1}{১১১}\right)$, তার মধ্যে (শূন্য বাদে) সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু থাকবেই; এখন লক্ষ্য করা যেতে পারে যে, এই মুক্ত অন্তরালের মধ্যে $\frac{1}{১১১৪}$ সংখ্যাটি (সেটের একটি বস্তু), কারণ $\frac{1}{১১১৪} < \frac{1}{১১১}$। আবার উপরোক্ত মুক্ত অন্তরালের একটি উপ-অন্তরাল (Sub-interval) নিলে তার মধ্যেও সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু থাকবেই। এইভাবে ক্রমাগত উপঅন্তরাল নিয়ে দেখা যায় সেই অতি ক্ষুদ্র উপ-অন্তরালের মধ্যেও সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু থাকবেই। উপরোক্ত উদাহরণ থেকে সাধারণ ভাবে বলা যায় যে যদি l, S সেটের সীমা হয়, তাহলে l কে নিয়ে যত ছোট অঞ্চল ধরা যাক না কেন, সেই অঞ্চলে S সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু (l ছাড়া) থাকবেই। সাধারণভাবে এরূপ সংজ্ঞা দেওয়ার উদ্দেশ্য এই যে S সেট তো নানারকম হতে পারে—যেমন একমাত্রিক দেশের বস্তু সমূহের সেট, অথবা দ্বিমাত্রিক দেশের বস্তুসমূহের সেট, ইত্যাদি। সেটের সীমার আরও বিস্তারিত আলোচনা এই অধ্যায়ে করা হবে।

ক্রমের সীমা :

এবার ক্রমের সীমার কথায় আসা যাক। উপরোক্ত উদাহরণটিতে যে সেটের আলোচনা করা হয়েছে তা প্রকৃতপক্ষে একটি ক্রম, কারণ উপরোক্ত সেটটি নিম্নলিখিত ক্রম আকারে লেখা যেতে পারে

$\{ a_n \}$, যেখানে $a_n = \dfrac{1}{n}$

অর্থাৎ যখন $n = 1$, তখন $a_1 = 1$

যখন $n = 2$, তখন $a_2 = \frac{1}{2}$

যখন $n = 3$ তখন $a_3 = \frac{1}{3}$ ইত্যাদি।

পূর্বেই দেখা গেছে যে এই ক্রমটির সীমা ‘0’। এখন ক্রমের সীমার সংজ্ঞার জন্য নিম্নলিখিত আলোচনা করা হবে। যদিও প্রত্যেক ক্রমই সেট (কিন্তু প্রত্যেক সেটই ক্রম নয়), তথাপি ক্রম একটি বিশেষ ধরণের সেট (ক্রম একটি গণনীয় সেট) বলে ক্রমের সীমার সংজ্ঞা আলাদা করে দেওয়া হয়।

একটি ক্রমের অর্থাৎ $\{ a_n \}$ এর সীমাবিন্দু যদি l হয়, তাহলে একটি ধনাত্মক সংখ্যা

ϵ (যতই ছোট হোক না কেন) ধরলে তার সংগত একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N থাকবে যাদের দ্বারা নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হবে

$$|a_{N+p}-l| < \epsilon \,; \quad p=0, 1, 2, \ldots\ldots$$

অর্থাৎ $\quad l-\epsilon < a_{N+p} < l+\epsilon.$

এই সংজ্ঞা অনুযায়ী দেখা যায় $\{a_n\} \equiv \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটির সীমা '0' কিনা। এখানে ধর $l=0$, তাহলে সংজ্ঞা অনুযায়ী আমরা পাই

$$\left|\frac{1}{N+p}-0\right| < \epsilon \,; \; p=0, 1, 2\ldots\ldots$$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{N+p} < \epsilon$ $\left[\text{যেহেতু } N+p > 0, \text{ সেহেতু } \left|\dfrac{1}{N+p}\right| = \dfrac{1}{N+p}\right]$

অর্থাৎ $N \;\; + > \dfrac{1}{\epsilon}$

$\therefore$ উপরোক্ত অসমতাটি সিদ্ধ হয় যখনই $N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, $\left[\frac{1}{\epsilon}\right] = \frac{1}{\epsilon}$ এর মধ্যে সবচেয়ে বেশী যতটা পূর্ণসংখ্যা আছে ততটা।

তাহলে দেখা যায় প্রতি ϵ এর জন্য একটি N বিদ্যমান, যার জন্য

$$\left|\frac{1}{N+p}-0\right| < \epsilon \,; \; p=0, 1, 2, \ldots\ldots$$

এখন ধরা যাক $\epsilon = \frac{1}{100}$, তাহলে $N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right] = 100$; অর্থাৎ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটির সীমা '0' ; কারণ যখন $\epsilon = \frac{1}{100}$, তখন $N > 100$ এবং

$$\left|\frac{1}{101+p}-0\right| < \frac{1}{100} \,; \; p=0, 1. 2, \ldots\ldots$$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{1}{101+p}-0 < \dfrac{1}{100} \,; \; p=0, 1, 2, \cdots$

অর্থাৎ $\quad \frac{1}{101}-0 < \frac{1}{100}, \; \frac{1}{102}-0 < \frac{1}{100}, \ldots\ldots$ইত্যাদি।

অতএব এই $\epsilon = \frac{1}{100}$ এর জন্য ক্রমটির একশত বস্তু ($n=1, 2, \cdots\cdots 100$) বাদে বাকী সব বস্তুগুলির প্রত্যেকটি থেকে শূন্য বাদ দিলে অন্তরফল $\epsilon = \frac{1}{100}$ এর চেয়ে ছোট ; যদিও ঐ একশটি বস্তুর প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে এরূপ অসমতা সিদ্ধ হয় না, তথাপি ক্রমটির একশটি বস্তু বাদে বাকী সব বস্তুগুলির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রে এরূপ অসমতা সিদ্ধ হয়। সেজন্য আমরা বলি এই ক্রমের সীমা '0', কারণ ক্রমের যে বস্তুগুলির ক্ষেত্রে ঐ অসমতা

সিদ্ধ হচ্ছে না তাদের সংখ্যা তো সসীম বা সান্ত এবং ক্রমের যে বস্তুগুলির ক্ষেত্রে ঐ অসমতা সিদ্ধ হচ্ছে তাদের সংখ্যা অসীম বা অনন্ত।

আবার লক্ষ্য করা উচিত $\epsilon = \frac{8}{1000}$ ধরলে N এর মানগুলি পরিবর্তিত হয়ে যায়; কিন্তু সব সময় প্রত্যেক ϵ এর জন্য N বিদ্যমান এবং এই উদাহরণে দেখানো হয়েছে

$$N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$$

অতএব যখন $\epsilon = \frac{3}{1000}$, তখন $N > \left[\frac{1}{\epsilon}\right] = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333$;

তাহলে সংজ্ঞা অনুযায়ী $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটির সীমা শূন্য।

উপরোক্ত আলোচনায় ক্রমের সীমার সংজ্ঞার কথা বলা হয়েছে। এই অধ্যায়ে ক্রমের সীমার নিয়মগুলি আলোচনা করা হবে। এখন ক্রমের সীমা নির্ধারণের সহজ অভ্যাসের কথা বলা হবে। ক্রমের সীমা নির্ধারণের সময় n কে খুব বড় ধরতে হয়। এই খুব বড়, আরও বড়, তার চেয়ে বড়, ... ধরতে ধরতে n এর আকার কিরূপ হয় তা চিন্তা করা দরকার। n তো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে n বড় হতে হতে যে রূপ গ্রহন করে তা চিহ্নিত করা হয়

$$n \rightarrow +\infty \text{ (ধনাত্মক অনন্ত)}$$

এখন এই ধনাত্মক অনন্তের কিছু ধর্ম নিম্নে দেওয়া হলো

$$n \rightarrow +\infty, \quad n^2 \rightarrow +\infty, \quad \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ ইত্যাদি।}$$

তাহলে $\{a_n\} \equiv \left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটির সীমা নির্ধারণের অভ্যাস নিম্নরূপ ঃ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

লক্ষ্য করা উচিত $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, কিন্তু $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; অর্থাৎ $\frac{1}{n}$ এর সীমা (যখন $n \rightarrow \infty$) শূন্যের সমান, কিন্তু $\frac{1}{n}$ শূন্যের কাছে পৌঁছায়।

এইরূপে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0, \text{ ইত্যাদি।}$$

অভিসারী ও অপসারী শ্রেণী ঃ

মনে কর $u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots$ একটি অসীম শ্রেণী। পূর্ব অধ্যায়ে বলা হয়েছে এরূপ শ্রেণীর যোগফলের একটি সঠিক সংজ্ঞা না দিলে কোন অর্থ হয় না। এরূপ শ্রেণীর সহিত একটি ক্রম জড়িত, যথা

$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \cdots\cdots$

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$, ইত্যাদি,

তাহলে এই আংশিক যোগফলের ক্রমটি $\{ s_n \}$ প্রদত্ত শ্রেণীর সহিত জড়িত। এখন যদি $\{ s_n \}$ ক্রমটির সীমা থাকে তাহলে $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটিকে অভিসারী (Convergent) বলা হয়। যে শ্রেণী অভিসারী নয় তাকে সাধারণভাবে অপসারী (divergent) বলা হয়, তবে অপসারী শ্রেণীকে দুভাগে ভাগ করা হয়, যথা—প্রকৃত অপসারী এবং দোলায়মান (oscillating)। অনেকে শ্রেণীকে তিনভাগে ভাগ করেন—অভিসারী, অপসারী এবং দোলায়মান।

এখন Σu_n শ্রেণীটি যদি অভিসারী হয়, তবে তার আংশিক যোগফলের ক্রমের অর্থাৎ $\{ s_n \}$ এর সীমা থাকবে। মনে কর

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n) = s$$

অর্থাৎ $u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots \text{ to } \infty = s$

অর্থাৎ $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

তাহলে দেখা গেল $\{ s_n \}$ ক্রমটির সীমাই Σu_n শ্রেণীটির যোগফল, এজন্য এরূপ শ্রেণীকে অভিসারী বলা হয়।

উদাহরণ হিসাবে নিম্নলিখিত শ্রেণীটি ধরা যাক।

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \equiv \sum u_n$$

এখানে $$u_1 = \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

যোগ করে পাওয়া যায়

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

এখন $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$;

যেহেতু $\frac{1}{n+1} \to 0$, যখন $n \to \infty$

$\therefore \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ অর্থাৎ শ্রেণীটি অভিসারী ।

আবার, $1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ শ্রেণীটির আংশিক যোগফলের ক্রম $1, 2, 3, 4, \cdots n, \cdots$

অর্থাৎ $s_n = n$

এখন যেহেতু $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \lim\limits_{n \to \infty} n = \infty$, এই শ্রেণীটি অভিসারী নয় ।

আবার $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$ শ্রেণীটির আংশিক যোগফলের ক্রম $1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots\cdots$

$\therefore$ এখানে $s_{2n} = 0$ এবং $s_{2n-1} = 1$

তাহলে $\lim\limits_{n \to \infty} s_{2n} = 0$ এবং $\lim\limits_{n \to \infty} s_{2n-1} = 1$

অর্থাৎ আংশিক যোগফলের ক্রমের সীমা 0 এবং 1 ; অতএব প্রদত্ত শ্রেণীটি অভিসারী নয়, এরূপ শ্রেণীটিকে দোলায়মান শ্রেণী (oscillating series) বলা হয় ।

3.02 সেটের সীমা

প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে S সেটের যদি l সীমা (limit) হয়, তাহলে l কে নিয়ে যত ছোট অঞ্চল (neighbourhood) ধরা যাক না কেন, সেই অঞ্চলে S সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু (l ছাড়া) থাকবেই । এই সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে S সেটের যদি l সীমা হয়, তাহলে l কে নিয়ে যে কোন অঞ্চলে S সেটের (l ছাড়া) অনন্ত বস্তু

থাকবেই ; কারণ সংজ্ঞায় যে কোন অঞ্চল নিয়ে তার চেয়ে যদি একটি ছোট অঞ্চল ধরা হয় (অর্থাৎ এই ছোট অঞ্চল পূর্বোক্ত অঞ্চলের যদি উপ-অঞ্চল হয়) তবে সংজ্ঞা অনুযায়ী এই ছোট অঞ্চলেও S সেটের (l ছাড়া) অন্তত পক্ষে একটি বস্তু থাকবেই এবং এইভাবে ক্রমাগত ছোট উপ-অঞ্চল নিয়ে আমরা প্রত্যেকটি অঞ্চলে S সেটের অন্তত পক্ষে একটি বস্তু পাই।

একমাত্রিক দেশের বস্তুসমূহের যে কোন সেটের (S এর) সীমা যদি l হয়, তবে l এর একটি ছোট অঞ্চল বলতে বুঝায় $(l-\epsilon, l+\epsilon)$, যেখানে ϵ পূর্বনির্দিষ্ট যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা যত ছোট হউক না কেন, l এর এই অঞ্চল থেকে l কে বাদ দিলে যে অঞ্চল পাওয়া যায় সেই অঞ্চলে S সেটের অন্ততপক্ষে একটি বস্তু x থাকবেই অর্থাৎ

(1) $0 < |x-l| < \epsilon, x \in S$

একমাত্রিক দেশের S সেটের সীমা l হলে আমরা (1) অসমতা সাহায্যে সীমাকে লিখতে পারি। x এর এই অস্তিত্ব আমরা অন্য সঙ্কেত চিহ্নের সাহায্যে লিখতে পারি। যেমন—

(2) $x \in N'(l, \epsilon), x \in S$ এবং $N'(l, \epsilon) \equiv (l-\epsilon, l+\epsilon)$

N' মুক্ত অন্তরালে l বাদে সব সংখ্যা নির্দেশ করে।

মন্তব্য ঃ (i) একটি সেটে একটির বেশী সীমা থাকতে পারে। যেমন মনে কর

$$S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots\right\}$$

এখানে S সেটের নিম্নলিখিত বস্তুগুলি

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots$$

লক্ষ্য করলে দেখা যায় উহাদের সীমা '0'। আবার S সেটের বাকী বস্তুগুলি

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots$$

লক্ষ্য করলে দেখা যায় উহাদের সীমা '1' ; অতএব S সেটের দুইটি সীমা, যথা 0 এবং 1।

(ii) সেটের সীমা বা সীমাগুলি সেটের বস্তু হতে পারে বা নাও হতে পারে।

(iii) সান্ত (finite) সেটের সীমা নাই।

(iv) সেটের বস্তুগুলির সংখ্যা অনন্ত হলে সীমা থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। যেমন $\{1, 2, 3, \cdots\}$ সেটের সীমা নেই।

সেটের সীমা সম্পর্কে নিম্নলিখিত উপপাদ্য বিশেষ প্রয়োজনীয় :

বোলজানো-ভ্যায়সট্রাস উপপাদ্য :

প্রত্যেক অনন্ত সপ্রান্ত সেটের অন্ততপক্ষে একটি সীমা থাকবেই। উপরোক্ত উপপাদ্য কলনবিদ্যায় বা বাস্তব সংখ্যার বিদ্যায় (Real analysis) বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। কিন্তু এই উপপাদ্যের প্রমাণ বর্তমান পুস্তকের পরিধির মধ্যে আসে না বলে প্রমাণ দেওয়া হলো না, শুধুমাত্র উদাহরণ সাহায্যে বুঝানো হলো।

মনে কর $S=\{1, 2, 3, \cdots\}$; এই সেটটির গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত 1, কিন্তু লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত নেই, অতএব সেটটি অনন্ত কিন্তু সপ্রান্ত নয়। তাই এই সেটটির ক্ষেত্রে উপরোক্ত উপপাদ্য প্রয়োগ করা যায় না। প্রকৃতপক্ষে আমরা জানি এই সেটের সীমা নেই।

আবার মনে কর $S=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$; এই সেটটি সপ্রান্ত, কারণ $0 < s \leqslant 1$, $s \in S$; এখানে বোলজানো-ভ্যায়সট্রাস উপপাদ্য অনুসারে S এর অন্ততপক্ষে একটি সীমা থাকবেই। প্রকৃতপক্ষে আমরা জানি এই সেটের সীমা '0' (শূন্য)।

3.03 ক্রমের সীমা

প্রাথমিক মন্তব্যে ক্রমের সীমার সংজ্ঞা অনুযায়ী দেখা যায় $\{a_n\}$ ক্রমের সীমা যদি l হয়, তাহলে

$$| a_{N+p} - l | < \epsilon ; \quad p=0, 1, 2, \cdots$$

প্রতি ϵ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N এর অস্তিত্ব থাকবে এবং এই ϵ এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে N এর মানও পরিবর্তিত হবে। যখন $\{a_n\}$ ক্রমের একটি সীমা থাকে তখন $\{a_n\}$ ক্রমকে আমরা **অভিসারী ক্রম** (convergent sequence) বলি। প্রয়োগের ক্ষেত্রে এই সংজ্ঞা তখনই সুবিধাজনক যখন $\{a_n\}$ ক্রমের সীমা l জানা থাকে ; কিন্তু যখন $\{a_n\}$ ক্রমটি অভিসারী নয় অর্থাৎ যখন l এর অস্তিত্ব থাকে না তখন উপরোক্ত সংজ্ঞা কোন কাজে লাগে না। সেজন্য অনেক সময় অভিসারী ক্রমের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া হয়।

একটি ক্রম $\{a_n\}$ কে অভিসারী বলা হবে যদি প্রতি ϵ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N থাকে যাদের দ্বারা নিম্নলিখিত অসমতা সিদ্ধ হয়

$$| a_{N+p} - a_N | < \epsilon ; \quad p=1, 2, 3 \cdots$$

অর্থাৎ $a_N - \epsilon < a_{N+p} < a_N + \epsilon ; \quad p=1, 2, 3 \cdots$

$N+p=M$ ধরলে আমরা পাই

$$|a_M-a_N|<\epsilon; \quad M>N$$

লক্ষ্য করা যায় যদি $M=N$ হয়, তাহলে $|a_M-a_N|=0<\epsilon$ অর্থাৎ অসমতাটি নিজেই সিদ্ধ। সেজন্য অভিসারী ক্রমের অসমতা সর্তটি লেখা হয়

$$|a_{N+p}-a_N|<\epsilon; \quad p=0, 1, 2, 3 \cdots$$

বা $$|a_M-a_N|<\epsilon; \quad M\geqslant N.$$

অভিসারী ক্রমের উপরোক্ত সংজ্ঞা বিখ্যাত গাণিতিক কসির (Cauchy) দেওয়া। এই সংজ্ঞার সুবিধা এই যে $\{a_n\}$ ক্রমটি অভিসারী হোক বা না হোক, সব সময়ই এই সংজ্ঞা প্রয়োগ করা যায়।

মন্তব্য ঃ (১) পাঠকগণের যখন ক্রমের সীমার সংজ্ঞা এবং অভিসারী ক্রমের সংজ্ঞা সম্পূর্ণ আয়ত্ব হয়ে যাবে তখন বোধ হয় সংজ্ঞায় N, M এই বড় হরফগুলি ব্যবহার না করে n, m এই ছোট হরফগুলি ব্যবহার করলে কোন অসুবিধা হবে না। তাই এই সব সংজ্ঞার পরবর্তী আলোচনায় ছোট হরফগুলি ব্যবহার করা হবে।

(২) বাস্তব সংখ্যার অভিসারী ক্রমের ক্ষেত্রে কসি (Cauchy) সর্তটি সিদ্ধ হবে এবং বিপরীতভাবে যে ক্রমের ক্ষেত্রে কসি সর্তটি সিদ্ধ হয় সেই ক্রমটি অভিসারী। এজন্য এরূপ ক্রমকে কসি-ক্রম (Cauchy sequence) বা মুখ্য ক্রম (fundamental sequence) বলে।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটি অভিসারী।

উত্তর ঃ প্রাথমিক মন্তব্যে আমরা ক্রমের সীমার সংজ্ঞা প্রয়োগ করে দেখেছি $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটির সীমা শূন্য (0)। যেহেতু এই ক্রমটির সীমা একটি সসীম সংখ্যা, সেহেতু $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটি অভিসারী। আবার ক্রমটির সীমা শূন্য না ধরে সাধারণভাবে ক্রমটি অভিসারী কিনা আলোচনা করা যেতে পারে। এই আলোচনাকালে আমাদের অভিসারী ক্রমের কসির সংজ্ঞা বা নীতি প্রয়োগ করতে হবে।

প্রকৃতপক্ষে আমরা দেখি

$$a_{n+p}-a_n=\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n} \qquad \left(\because \quad a_n=\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{-p}{n(n+p)}$$

$$\therefore \quad |a_{n+p}-a_n| = \frac{p}{n(n+p)}$$

তাহলে ক্রমটি অভিসারী হবে যদি নিম্নলিখিত কসি সর্তটি সিদ্ধ হয় ঃ

$$|a_{n+p}-a_n| < \epsilon\,; \quad p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

বা $\quad \dfrac{p}{n(n+p)} < \epsilon$

বা $\quad \dfrac{n(n+p)}{p} > \dfrac{1}{\epsilon}$

বা $\quad n+\dfrac{n^2}{p} > \dfrac{1}{\epsilon}$

আবার উপরোক্ত অসমতাটি সিদ্ধ হবে যদি $n > \frac{1}{\epsilon}$ হয় (p যাই হোক না কেন) অর্থাৎ $n-1=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ হলে কসি সর্তটি সিদ্ধ হবে। সুতরাং প্রতি ϵ এর জন্য n এর অস্তিত্ব বিদ্যমান $(n=[1/\epsilon]+1)$ যার দ্বারা কসি সর্তটি সিদ্ধ। অতএব $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটি অভিসারী।

উদাহরণ ঃ দেখাও যে $\{n\}$ ক্রমটি অভিসারী নয়।

উত্তর ঃ এখানে $a_n=n$ তাহলে $a_{n+p}-a_n=n+p-n=p$

$$\therefore \quad |a_{n+p}-a_n| = p\,; \quad p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

এখন $\{n\}$ ক্রমটি অভিসারী হতে হলে $|a_{n+p}-a_n| < \epsilon$ হতে হবে (ϵ যত ছোট ধনাত্মক সংখ্যা হোক না কেন এবং $p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)। কিন্তু $|a_{n+p}-a_n| = p \nless \epsilon$; যেহেতু কসি সর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে না, সেহেতু $\{n\}$ ক্রমটি অভিসারী নয়।

মন্তব্য ঃ লক্ষ্য করা যায় $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; যেহেতু ক্রমটির সীমা একটি সসীম সংখ্যা নয়, সেহেতু ক্রমটি অভিসারী নয়।

একটি ক্রম যখন অভিসারী হয় না তখন তার বিভিন্ন ধর্ম দেখা যায়। যেমন $\{n\}$ ক্রমটি অভিসারী নয়, ক্রমটির সীমা নির্ধারণ করতে গিয়ে দেখা যায় ক্রমের বস্তুগুলি বাড়তে বাড়তে কোন সসীম সংখ্যার কাছে পৌঁছায় না অর্থাৎ ক্রমটি উচ্চ (বা ডান) সপ্রান্ত নয় ; এরূপ ক্রমকে আমরা **ধনাত্মক অপসারী** (positively divergent) ক্রম বলি। আবার $\{-n\}$ ক্রমটিও অভিসারী নয়, ক্রমটির বস্তুগুলি কমতে কমতে কোন সসীম সংখ্যার কাছে পৌঁছায় না অর্থাৎ ক্রমটি নিম্ন (বা বাম) সপ্রান্ত নয় ; এরূপ ক্রমকে আমরা **ঋণাত্মক অপসারী** (Negatively divergent) ক্রম বলি। পুনরায়

$\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ ক্রমটি অভিসারী নয়, কারণ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\pm 1,$$

অর্থাৎ ক্রমটির সীমা দুটি সসীম সংখ্যা $+1$ এবং -1; এক্ষেত্রে ক্রমটিকে আমরা **সসীম দোলায়মান ক্রম** (finitely oscillating sequence) বলি। আবার $\{(-1)^n n\}$ ক্রমটি অভিসারী তো নয়, প্রকৃত অপসারীও নয়, কারণ $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n=\pm\infty$; এরূপ ক্রমকে আমরা **অসীম দোলায়মান ক্রম** (infinitely oscillating sequence) বলি। শেষোক্ত উদাহরণ দুইটির বিশেষত্ব এই যে প্রথম ক্রমটি সপ্রান্ত অথচ অভিসারী নয়, এবং দ্বিতীয় ক্রমটি সপ্রান্ত নয় অথচ অপসারী নয়।

মন্তব্য: প্রত্যেক অভিসারী ক্রম সপ্রান্ত।

3.04 মুক্ত সেট এবং বদ্ধ সেট

মনে কর S একটি সেট এবং S' সেটটি S সেটের সকল সীমার সেট। এখন যদি $S'\subset S$ হয়, তাহলে আমরা S সেটকে একটি **বদ্ধ সেট** (closed set) বলি। এমনকি যদি $S'=\phi$ (শূন্য সেট) হয়, তাহলেও $\phi\subset S$, অতএব এক্ষেত্রে আমরা S সেটকে বদ্ধ সেট বলব।

উদাহরণ:

(i) মনে কর $S=\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$, তাহলে $S'=\{0\}$ এবং $0\notin S$; অতএব S সেটটি বদ্ধ নয়।

(ii) যদি a এবং b দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $S=(a, b)$, তাহলে $S'=[a, b]$; এখন যেহেতু $[a, b]\not\subset(a, b)$, S সেটটি বদ্ধ নয়।

(iii) যদি $S=[a, b]$, তাহলে $S'=[a, b]$; এখন যেহেতু $S=S'$ অতএব $S'\subset S$ এবং $S\subset S'$.

যখন এক্ষেত্রে $S'\subset S$, আমরা S সেটকে বদ্ধ বলতে পারি।

সংজ্ঞা: মনে কর $x\in S$; এখন যদি এমন একটি মুক্ত অন্তরাল (α, β) থাকে যাতে $x\in(\alpha, \beta)$ হয় এবং $(\alpha, \beta)\subset S$ হয়, তাহলে x বিন্দুকে S সেটের

অন্তঃ বিন্দু (Interior point) বলা হয়। একটি সেট S এর যদি সব বস্তুগুলি (বা বিন্দুগুলি) অন্তঃবিন্দু হয় তবে S সেটকে আমরা **মুক্ত সেট** (open set) বলি।

উদাহরণ :

প্রত্যেক মুক্ত অন্তরাল (a, b) একটি মুক্ত সেট ; কারণ এই মুক্ত অন্তরালের একটি বিন্দু x নিলে দেখা যায় $a < x < b$, অতএব সবসময় একটি মুক্ত অন্তরাল (α, β) পাওয়া যাবে যাতে $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ এবং $x \in (\alpha, \beta)$। কিন্তু সেটটি যদি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ হয় ; তাহলে সেটটি মুক্ত সেট নয়, কারণ সেটের দুই প্রান্তে যে বিন্দু দুইটি (যথা a এবং b) আছে তারা অন্তঃবিন্দু নয়।

3.05 ক্রমের সীমা নির্ধারণের নিয়ম

ক্রমের সীমা নির্ধারণের নিয়মগুলি প্রয়োগের ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়।

নিয়মগুলি নিম্নরূপ :—

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \left\{\lim\limits_{n \to \infty} a_n\right\} \cdot \left\{\lim\limits_{n \to \infty} b_n\right\}$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \left\{\lim\limits_{n \to \infty} a_n\right\} \Big/ \left\{\lim\limits_{n \to \infty} b_n\right\}$;

$\lim\limits_{n \to \infty} b_n \neq 0$

(4) যদি $a_n < b_n$, তবে $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

(5) যদি $a_n > b_n$, তবে $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

(6) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n-1} = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1}$

উপরোক্ত নিয়মগুলির ক্ষেত্রে অবশ্য যেখানে যেখানে সীমার চিহ্ন দেওয়া হয়েছে সেই সীমাগুলি বিদ্যমান থাকবে। পাঠকদের নিয়মগুলির প্রমাণ অভ্যাস করা ভাল। যেমন যদি প্রথম নিয়মটি প্রমাণ করতে বলা হয়, তবে আমরা নিম্নলিখিতভাবে আলোচনা করতে পারি :

যদি $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$ এবং $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = m$ হয়, তবে সংজ্ঞা

অনুসারে প্রতি $\epsilon/2$ এর জন্য (এখানে ϵ এর বদলে $\epsilon/2$ ধরলে প্রমাণের শেষের দিকে অসমতাটি ϵ এ লেখার সুবিধা হয়, যেহেতু ϵ অবাধ (arbitrary) সেহেতু $\epsilon/2$ ধরলে কিছু ক্ষতি হয় না) দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n_1 এবং n_2 থাকবে যাদের দ্বারা নিম্নলিখিত অসমতাগুলি সিদ্ধ হবে।

$$|a_\nu - l| < \epsilon/2, \quad \text{যখন } \nu \geqslant n_1$$

$$\text{এবং} \quad |b_\nu - m| < \epsilon/2, \text{ যখন } \nu \geqslant n_2$$

এখন যদি এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n কল্পনা করি যা n_1 এবং n_2 থেকে বড় (অথবা n_1 এবং n_2 এর মধ্যে যেটি বড় তার সমান), তাহলে যখন $\nu \geqslant n$ তখন আমরা পাই

$$|(a_\nu + b_\nu) - (l+m)| \leqslant |a_\nu - l| + |b_\nu - m|$$
$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$
$$(\because \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = l + m = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

মন্তব্য : নিয়মটি দুটির বেশী ক্রমগুলির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, কারণ

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} \{(a_n + b_n) + c_n\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) + \lim_{n\to\infty} c_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n$$

ইত্যাদি।

উদাহরণ :

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \qquad \left(\because \lim_{n\to\infty} c = c, \text{ যখন } c \text{ ধ্রুবক}\right)$$

$$= \frac{1}{1+0} \qquad \left(\because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

$$= 1$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+3}{5n^2+4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{5+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{5}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

4. যদি $a_n = \sqrt[n]{n}$, তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$a_n = 1 + b_n, \quad b_n > 0$$

এখন $n = (a_n)^n = (1+b_n)^n$

$$= 1 + n\, b_n + \frac{n(n-1)}{2!}(b_n)^2 + \cdots\cdots + (b_n)^n$$

$$> \frac{n(n-1)}{2\,!} b_n^{\,2}$$

$$\therefore \quad 0 < b_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

কিন্তু $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = 0$

$$\therefore \quad 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 0$$

সুতরাং $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1+b_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

সুতরাং $\sqrt[n]{n} \to 1$, যখন $n \to \infty$

5. যদি $b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n)^2}$, তাহলে আমরা পাই

$$\underbrace{\frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}}_{(n+1) \text{ সংখ্যক}} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$< \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{(n+1) \text{ সংখ্যক}}$$

অর্থাৎ $\frac{n+1}{(2n)^2} < b_n < \frac{n+1}{n^2}$

মনে কর $a_n = \frac{n+1}{(2n)^2}$ এবং $c_n = \frac{n+1}{n^2}$

$$\therefore \quad a_n < b_n < c_n$$

তাহলে $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim_{n\to\infty} c_n$

কিন্তু $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4} = 0$

এবং $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 0$

$$\therefore \; 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n \leqslant 0$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

অর্থাৎ $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \to 0$, যখন $n \to \infty$

3.06 ক্রমের সীমার কয়েকটি উপপাদ্য

উপপাদ্য 1. অভিসারী ক্রমের একটির বেশী সীমা থাকতে পারে না।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয়, মনে করা যাক $\{a_n\}$ ক্রমের দুটি সীমা l ও l' আছে, যেখানে $l \neq l'$.

যেহেতু $l \neq l'$, $l - l' \neq 0$; অতএব মনে কর $|\, l - l' \,| = \delta$.

এখন ধর $\epsilon < \delta$.

যেহেতু $\{ a_n \}$ ক্রমের l এবং l' দুটি সীমা, অতএব প্রতি $\epsilon/2$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n আছে যাদের দ্বারা নিম্নলিখিত অসমতাগুলি সিদ্ধ :

$$| l - a_{n+p} | < \epsilon/2, \quad | l' - a_{n+p} | < \epsilon/2 \; ; \; p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\text{এখন } \delta = | l - l' | = | (l - a_{n+p}) - (l' - a_{n+p}) |$$
$$\leqslant | l - a_{n+p} | + | l' - a_{n+p} |$$
$$< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ পূর্বেই ধরা হয়েছে $\delta > \epsilon$. এই অসম্ভব পরিণতির কারণ আমাদের $\{ a_n \}$ ক্রমের দুটি বিভিন্ন সীমা ধরা হয়েছে। অতএব $\{ a_n \}$ ক্রমের দুটি বিভিন্ন সীমা থাকতে পারে না।

মন্তব্য। সেটের দুটি বিভিন্ন সীমা থাকতে পারে, কিন্তু অভিসারী ক্রমের দুটি বিভিন্ন সীমা থাকতে পারে না।

উপপাদ্য 2. যদি একটি একদিষ্ট আরোহী এবং উচ্চ সপ্রান্ত ক্রমের ($\{ a_n \}$ এর) লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্ত U হয় তবে $\{ a_n \}$ ক্রমের সীমা U হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $\{ a_n \}$ ক্রমের লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্ত U, সেহেতু প্রতি ϵ এর জন্য ক্রমের একটি বস্তু a_n এমন আছে যাতে

$$U - \epsilon < a_n$$
$$\therefore \quad 0 \leqslant U - a_n < \epsilon$$

পুনরায় $\{ a_n \}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী, অতএব আমরা পাই

$$a_{n+p} \geqslant a_n \; ; \; p = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\text{সুতরাং } U - a_{n+p} \leqslant U - a_n$$
$$\text{কিন্তু } U - a_n < \epsilon$$
$$\therefore \quad 0 \leqslant U + a_{n+p} < \epsilon$$
$$\text{অর্থাৎ } | U - a_{n+p} | < \epsilon : p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

সীমার সংজ্ঞা থেকে স্পষ্টতই পাই

$$\lim_{n \to \infty} a_n = U.$$

উপপাদ্য 3. যদি একটি একদিষ্ট অবরোহী এবং নিম্ন সপ্রান্ত ক্রমের ($\{a_n\}$ এর) গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত L হয়, তবে $\{ a_n \}$ ক্রমের সীমা L হবে।

প্রমাণ : উপপাদ্য 2 এর মত।

মন্তব্য : (i) উপরোক্ত উপপাদ্য দুটি খুবই প্রয়োজনীয়, কারণ একদিষ্ট ক্রমের অভিসারী ধর্ম পরীক্ষার জন্য উহা উচ্চ সপ্রান্ত বা নিম্ন সপ্রান্ত দেখতে হবে। অর্থাৎ প্রয়োগের ক্ষেত্রে যদি কোন ক্রম একদিষ্ট হয় তাহলে উপরোক্ত উপপাদ্য দুটির সাহায্যে ক্রমটি অভিসারী কিনা আলোচনা করা যেতে পারে।

(ii) উদাহরণ হিসাবে $\{ n \}$ ক্রমটি নিলে দেখা যায় ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী, কিন্তু ক্রমটি উচ্চ সপ্রান্ত নয়। $\{ n \}$ ক্রমটি অভিসারী নয়, ইহার একমাত্র কারণ যে ক্রমটি উচ্চ সপ্রান্ত নয় (অর্থাৎ উপপাদ্য 2 এর সর্ত ক্রমটিতে খাটে না)।

উদাহরণ :—

1 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী, কারণ যদি $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ হয় তবে

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\text{, তাহলে } a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

অর্থাৎ $a_n < a_{n+1}$; $n = 1, 2, \cdots\cdots$

পুনরায় $n < n+1$; $n = 1, 2, \cdots\cdots$

$$\therefore \quad \frac{n}{n+1} < 1$$

অর্থাৎ ক্রমটির ক্ষেত্রে $a_n < 1$ এবং প্রতি $\epsilon > 0$ এর জন্য একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা m এমন আছে যাতে $1 - \epsilon < a_m$ সিদ্ধ হয়। সুতরাং ক্রমটির লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্তিক বিন্দু $U = 1$. অতএব উপপাদ্য 2 এর অনুসারে $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

2. $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ ক্রমটি একদিষ্ট অবরোহী এবং ক্রমটির গরিষ্ট নিম্নপ্রান্তিক বিন্দু $L = 1$; অতএব উপপাদ্য 3 অনুসারে $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{n} = 1.$

3. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ক্রমটি একদিষ্ট অবরোহী এবং ক্রমটির গরিষ্ট নিম্ন প্রান্তিক বিন্দু $L = 0$; অতএব উপপাদ্য 3 অনুসারে $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$

বিশেষ উদাহরণ :—যদি $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\{a_n\}$ ক্রমটি অভিসারী।

সমাধান :—

সমাধানের প্রথম ধাপ :—প্রথমে $\{a_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট কিনা আলোচনা করা হবে। যেহেতু n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, দ্বিপদ উপপাদ্য অনুসারে পাই

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2\,!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!}.\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

n এর পরিবর্তে $n+1$ লিখলে পাওয়া যায়

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

এখন a_n এবং a_{n+1} পদদুটির বিস্তৃতির তুলনা করলে সহজেই নিম্নলিখিত অসমতাগুলি লক্ষ্য করা যায়

$$1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}\,, \qquad 1-\frac{2}{n+1} > 1-\frac{2}{n}\,, \text{ ইত্যাদি।}$$

অধিকন্তু a_{n+1} এর বিস্তৃতির একটি বেশী পদ আছে (যথা শেষ পদ) এবং ঐ পদ ধনাত্মক।

সুতরাং $a_{n+1} > a_n$; $n = 1, 2, \ldots\ldots$

অর্থাৎ $\{a_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী।

সমাধানের দ্বিতীয় ধাপ : যেহেতু $\{a_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী, এখন দেখতে হবে উহা উচ্চ সপ্রান্ত কিনা।

$$\therefore \quad a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n\,!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad a_n < 1+1+\frac{1}{2\,!}\,.\,1+\frac{1}{3\,!}\,1.1+\cdots+\frac{1}{n\,!}\,.1.1\cdots 1$$

$$=1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots\frac{1}{n\,!}$$

এখন $3\,! = 1.2.3 > 1.2.2 = 2^2$

$$\therefore \quad \frac{1}{3\,!} < \frac{1}{2^3}\ ;$$

$$4\,! \quad = 1.2.3.4 > 1.2.2.2 = 2^3$$

$$\therefore \frac{1}{4\,!} < \frac{1}{2^3}$$ ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে $\dfrac{1}{n\,!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

তাহলে $a_n < 1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$=1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \quad 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \quad = \quad 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$$

অর্থাৎ $\{a_n\}$ ক্রমটি উচ্চ সপ্রান্ত।

সমাধানের তৃতীয় ধাপ : যেহেতু $\{a_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী এবং উচ্চ সপ্রান্ত, সেহেতু $\{a_n\}$ ক্রমটির একটি লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্তিক বিন্দু আছে এবং উপপাদ্য 2 প্রয়োগ করা যেতে পারে।

যদি $\{a_n\}$ ক্রমটির লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্তিক বিন্দু U হয়, তবে $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = U$

অর্থাৎ ক্রমটি অভিসারী।

মন্তব্য :—(i) উপরোক্ত আলোচনা থেকে সহজেই পাওয়া যায়

$$a_n < 3 \text{ এবং } a_n > 2$$

$$\therefore \quad 2 < a_n < 3$$

এখন $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} 3$

অর্থাৎ $2 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant 3.$

প্রকৃতপক্ষে $\{a_n\}$ ক্রমটির সীমা 2·7182818…… ; এই সীমাটি একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা ; এই সীমাটি গণিতশাস্ত্রে 'e' দ্বারা সূচিত হয়।

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(ii) উপরোক্ত ক্রমটির সমস্ত পদগুলি 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যা ; কিন্তু ক্রমটির সীমা একটি 'ইররাসানাল' (irrational) সংখ্যা। এই উদাহরণ সহজেই বুঝিয়ে দেয় যে সকল 'র‍্যাসানাল' (rational) সংখ্যার ক্রমের সীমা 'র‍্যাসানাল' (rational) নয়—ইহাই ক্যাণ্টরের তত্ত্বের মূল কথা।

উপপাদ্য 4. (ক্যাণ্টরের অন্তরাল-উপপাদ্য)

যদি একটি বদ্ধ অন্তরালের ক্রম $\{[a_n, b_n]\}$ এমন হয় যে প্রতিটি অন্তরাল (প্রথমটি বাদে) তার পূর্ববর্তী অন্তরালের মধ্যে থাকে এবং ক্রমের অন্তরালের দৈর্ঘ্যগুলি কমতে কমতে শূন্যের কাছে পৌঁছায়, তবে একটি ও কেবলমাত্র একটি সংখ্যা α থাকবে যা প্রতিটি অন্তরালের মধ্যে অবস্থিত এবং

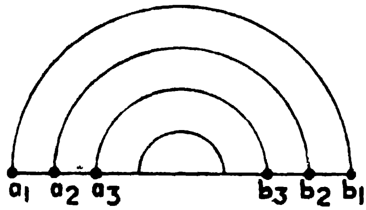
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

(উপরোক্ত উপপাদ্যটি কলন বিদ্যার খুবই প্রয়োজনীয়। উপপাদ্যটি ক্রমের উপপাদ্য 2 এবং 3 এর প্রয়োগের একটি বিশেষ ফল)

প্রমাণ :—

উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী আমরা পাই

$a_n \leqslant a_{n+1},\ b_n \geqslant b_{n+1}\ ;\ n=1, 2, 3, \cdots$



অতএব $\{a_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী এবং $\{b_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট অবরোহী।

পুনরায় ক্রম দুটি স্পষ্টতই সপ্রান্ত। অতএব উপপাদ্য 2 এবং 3 অনুসারে ক্রম দুইটি অভিসারী হবে। তাহলে লেখা যায়

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ এবং } \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n)$$

কিন্তু $[a_n, b_n]$ বদ্ধ অন্তরালের দৈর্ঘ্য $(b_n - a_n)$ এবং উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

$$\therefore \quad \beta - \alpha = 0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad \beta = \alpha$$

সুতরাং $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ ক্রম দুইটি একই সীমায় (α) পৌঁছায়।

এখন α একদিষ্ট আরোহী এবং উচ্চ সপ্রান্ত ক্রম $\{a_n\}$ এর সীমা বলে α ঐ ক্রমের লঘিষ্ট উচ্চ প্রান্তিক বিন্দু। আবার α একদিষ্ট অবরোহী এবং নিম্ন সপ্রান্ত ক্রম $\{b_n\}$ এর সীমা বলে α ঐ ক্রমের গরিষ্ট নিম্ন প্রান্তিক বিন্দু।

$\therefore \quad a_n \leqslant \alpha, \quad b_n \geqslant \alpha$

অর্থাৎ $\quad a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n \; ; \quad n = 1, 2, 3 \cdots$

তাহলে α সংখ্যাটি $\{[a_n, b_n]\}$ ক্রমের প্রতিটি অন্তরালের মধ্যে অবস্থিত।

সবশেষে দেখানো দরকার যে α সংখ্যাটি অদ্বিতীয়। যদি সম্ভব হয় তবে মনে করা যাক এরূপ সংখ্যা আর একটি আছে, যথা α' ; তাহলে ধরা দেখি

$$a_n \leqslant \alpha' \leqslant b_n$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \alpha' \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$$

অর্থাৎ $\quad \alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha$

সুতরাং $\quad \alpha = \alpha'$

ইহাই প্রমাণ করে যে α অদ্বিতীয়।

মন্তব্য :—উপরোক্ত ক্যান্টরের উপপাদ্যের সাহায্যে কলন বিদ্যায় তথা গাণিতিক বিশ্লেষণ বিদ্যার বহু উপপাদ্য প্রমাণ করা হয়।

3.07 অভিসারী ও অপসারী শ্রেণী

প্রাথমিক মন্তব্যে অভিসারী ও অপসারী শ্রেণীর ধারণা উদাহরণ সাহায্যে পরিষ্কার করে বুঝানো হয়েছে। পূর্বেই লক্ষ্য করা হয়েছে শ্রেণীর আলোচনা তত্ত্বে সীমার কথা

এসে যায়। তাই কলন-বিদ্যায় সীমার ধারণাটি বিশেষ প্রয়োজনীয়। সীমার সংজ্ঞার সাহায্যে সীমার আলোচনা একরকম, আবার কতকগুলি নিয়ম বা উপপাদ্যের সাহায্যে সীমা নির্ধারণ করা আর একরকম। সীমা নির্ধারণের অভ্যাস যত শীঘ্র আয়ত্ব হয়, সীমার সংজ্ঞার স্পষ্ট ধারণা তত শীঘ্র আয়ত্ব হয় না, তাই পাঠকগণের সীমার সংজ্ঞার ধারণা প্রথমে আয়ত্ব করে নেওয়া ভাল। ক্রম বা ফাংশনের সীমার কথা যেখানে আছে সেখানে '→' চিহ্নটিকে কখনই '=' ধরা উচিত নয়, এরূপ ধরার ফলেই সংজ্ঞার মূল কথা আয়ত্ব হয় না এবং এই মূল কথা আয়ত্বে না আসলে সীমার ধারণা পাঠকের কাছে দুরূহ হয়ে ওঠে, যদিও পাঠকদের অনেক সময় সীমা নির্ধারণ সহজেই অভ্যাসের ফলে আয়ত্ব হয়।

এখন শ্রেণীর অভিসরণ (convergence) বা অপসারণ (divergence) সম্বন্ধে কয়েকটি ধর্মের কথা বলা হবে।

উপপাদ্য 1. একটি শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হতে হলে নিম্নলিখিত সর্ত আবশ্যক ও পর্যাপ্ত (necessary and sufficient)

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

যেখানে $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$

প্রমাণ ঃ

মনে কর $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী ; তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

যেখানে $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$\lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

অথবা $\lim_{n\to\infty} (s - s_n) = 0$

অথবা $\lim_{n\to\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) = 0,$ কারণ $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

অথবা $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

বিপরীতভাবে মনে কর $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$; তাহলে আমরা পাই

$$\lim_{n \to \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots) = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \right\} = 0$$

অথবা $$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n - s_n \right\} = 0$$

উপরোক্ত সমতা হতে স্পষ্টতই বুঝা যায় $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী, কারণ শ্রেণীটি যদি অভিসারী না হয় তবে $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n - s_n \right\}$ এর সীমা শূন্য হতে পারে না। এখন শ্রেণীটি অভিসারী হলে দেখা যায় $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \to \infty} s_n$.

উপপাদ্য 2. একটি শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ যদি অভিসারী হয়, তবে এই শ্রেণী থেকে যে কোন একটি পদ বাদ দিলে শ্রেণীটির অভিসরণ ধর্ম নষ্ট হয় না (অর্থাৎ শ্রেণীর যোগফল পরিবর্তিত হতে পারে, কিন্তু শ্রেণীর অভিসরণ ধর্ম বজায় থাকে)

প্রমাণ : যেহেতু শ্রেণীটি অভিসারী, আমরা লিখতে পারি

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n, \quad s_n = u_1 + n_2 + \cdots + u_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

$$= u_i + \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_n)$$

$$\therefore \quad s - u_i = \lim_{n \to \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_n)$$

অতএব $u_1 + u_2 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_n + \cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী

মন্তব্য :

(i) কোন শ্রেণীর অভিসরণ ধর্ম পরীক্ষা করার সময় সুবিধার জন্য আমরা প্রথম পদ (u_1) বাদ দিতে পারি।

(ii) কোন অভিসারী শ্রেণীর সহিত একটি বেশী পদ যোগ করলেও শ্রেণীর অভিসরণ ধর্ম নষ্ট হয় না—ইহাও সহজে প্রমাণ করা যায়।

(iii) কোন অভিসারীর প্রত্যেক পদকে যে কোন একটি ধ্রুবক দ্বারা গুণ করলেও শ্রেণীর অভিসরণ ধর্ম নষ্ট হয় না অর্থাৎ যদি $s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ হয়, তবে

$$cs=\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$$

উপপাদ্য 3. যদি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ এবং $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ শ্রেণী দুটি অভিসারী হয় তবে $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : মনে কর $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s,\quad s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

এবং $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t,\quad t_n=v_1+v_2+\cdots+v_n$

পুনরায় মনে কর $w_n=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)$

এখন
$$\lim_{n\to\infty} w_n=\lim_{n\to\infty}\{(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{(u_1+u_2+\cdots+u_n)+(v_1+v_2+\cdots+v_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(s_n+t_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} s_n+\lim_{n\to\infty} t_n$$
$$=s+t.$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=s+t.$ অর্থাৎ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ শ্রেণীটি অভিসারী

উপপাদ্য 4. যদি শ্রেণীর পদগুলি ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে শ্রেণীটি অভিসারী বা প্রকৃত অপসারী হবেই, কিন্তু শ্রেণীটি দোলায়মান হতে পারে না।

প্রমাণ : যেহেতু $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ $(u_i > 0;\ i = 1, 2, \cdots)$, সেহেতু $\{s_n\}$ ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী। অতএব $\lim_{n \to \infty} s_n$ একটি সসীম সংখ্যা হবে অথবা $+\infty$ হবে। যখন সীমা একটি সসীম সংখ্যা, তখন শ্রেণীটি অভিসারী ; আবার সীমা যখন $+\infty$, তখন শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

উপপাদ্য 5. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হতে হলে নিম্নলিখিত আবশ্যক ও পর্য্যাপ্ত সর্তটি সিদ্ধ হবে

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} | < \epsilon ; \quad p = 0, 1, 2, \cdots$$

(প্রতি ϵএর জন্য একটি nএর অস্তিত্ব থাকবে)

প্রমাণ : মনে কর $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

এখন $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হতে হলে আবশ্যক ও পর্য্যাপ্ত সর্ত হিসাবে $\{s_n\}$ ক্রমটি অভিসারী হবে। এখন $\{s_n\}$ ক্রমটি অভিসারী হতে হলে আমরা জানি নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হবে

$$| s_{n+p} - s_n | < \epsilon ; \quad p = 0, 1, 2, \cdots$$

অর্থাৎ $| (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+p}) - (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) | < \epsilon$

অর্থাৎ $| u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} | < \epsilon$

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর নিম্নলিখিত শ্রেণীটি অপসারী

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

সমাধান : মনে কর $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

এখন $$s_{n+p} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

$$\geqslant \frac{p}{n+p} \geqslant \frac{\frac{1}{2}(p+n)}{n+p}, \text{ যদি } p \geqslant n \text{ হয়}$$

$$\therefore \quad s_{n+p} - s_n \geqslant \tfrac{1}{2}, \text{ যখন } p \geqslant n.$$

যদি $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ ধরা হয়, তাহলে $s_{n+p} - s_n > \epsilon$; অতএব দেখা যায় $| s_{n+p} - s_n | \nless \epsilon$, যখন $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ এবং $p \geqslant n$. সুতরাং $\{ s_n \}$ ক্রমটি অভিসারী নয় অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণীটি অভিসারী নয়। যেহেতু শ্রেণীটির প্রত্যেক পদ ধনাত্মক, শ্রেণীটি দোলায়মান হতে পারে না। অতএব শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

উদাহরণ 2. নিম্নলিখিত শ্রেণীটির অভিসরণ ধর্ম আলোচনা কর।

$$1 + x + x^2 + \cdots\cdots$$

সমাধান ঃ মনে কর $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$

$$\therefore \quad x\, s_n = x + x^2 + x^3 + \cdots x^n$$

তাহলে $s_n - x s_n = 1 - x^n$

$$\therefore \quad s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x} (x \neq 1)$$

এখন $\lim\limits_{n \to \infty} x^n = 0$, যখন $| x | < 1$

$= \infty$, যখন $x > 1$

$= \pm \infty$, যখন $x < -1$

পুনরায় যখন $x = 1$, $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$; এক্ষেত্রে

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} n = \infty$$

আবার যখন $x = -1$, $\lim\limits_{n \to \infty} x^n$ কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা নয়, সংখ্যাটি -1 এবং $+1$ বলে $\{x^n\}$ ক্রমটি দোলায়মান।

অতএব দেখা যায় শ্রেণীটি অভিসারী যখন $| x | < 1$, শ্রেণীটি অপসারী যখন $x \geqslant 1$, শ্রেণীটি সসীম সংখ্যায় দোলায়মান যখন $x = -1$, শ্রেণীটি অসীম সংখ্যায় দোলায়মান যখন $x < -1$.

উপপাদ্য 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হলে $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ হবে।

প্রমাণ ঃ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ শ্রেণীটি অভিসারী হলে শ্রেণীটির আংশিক যোগফলের ক্রম $\{s_n\}$, $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, অভিসারী হবে। তাহলে আমরা পাই

$$(1) \quad \cdots\cdots |s_{n+p} - s_n| < \epsilon\,; \quad p = 0, \; 1, \; 2, \cdots$$

উপরোক্ত অসমতাটিতে $p = 1$ বসালে পাওয়া যায়

$$|s_{n+1} - s_n| < \epsilon$$

অর্থাৎ $|u_{n+1}| < \epsilon$

$\therefore \lim_{n\to\infty} |u_{n+1}| \leqslant \epsilon$; কিন্তু ϵ অবাধ ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা ;

সুতরাং ϵ যত খুশী ছোট ধরা যেতে পারে।

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = 0$$

সুতরাং $\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \cdots\cdots(2)$

মন্তব্য ঃ লক্ষ্য করা উচিত যে Σu_n শ্রেণীটি অভিসারী হতে হলে (1) অসমতাটি $p = 1, 2\cdots$ দ্বারা সিদ্ধ হতে হবে ; কিন্তু (2) সম্বন্ধটি পাওয়া গেছে $p = 1$ বসিয়ে ; অতএব অভিসারী হবার আরও অনেক সর্ত আছে যথা $p = 2, 3, \cdots$ ইত্যাদি বসিয়ে। সুতরাং (1) সম্বন্ধটি শ্রেণীর অভিসরণের **আবশ্যক সর্ত**। কিন্তু এই সর্তটি **পর্য্যাপ্ত হতে পারে না**; উদাহরণ হিসাবে যদি নিম্নলিখিত শ্রেণীটি চিন্তা করা হয়,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

তাহলে সহজেই দেখা যায় $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; কিন্তু উপপাদ্য 5 এর উদাহরণ 1 এ দেখানো হয়েছে এই শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

উদাহরণ 1. দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$ শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

সমাধান : এখানে $u_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1.\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 1$$

যেহেতু শ্রেণীর অভিসরনের আবশ্যক সর্ত অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ সিদ্ধ হচ্ছে না এবং শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক, সেহেতু শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

উদাহরণ 2. দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

সমাধান : 3·05 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 4 তে দেখানো হয়েছে যে

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

অতএব পূর্ব উদাহরণের যুক্তি অনুসারে শ্রেণীটি প্রকৃত অপসারী।

উপপাদ্য 7. দুইটি শ্রেণী $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ এবং $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ যদি এমন হয় যে $u_n \leqslant v_n$: $n = 1, 2, \cdots$, $u_n > 0$ $v_n > 0$ তবে Σv_n শ্রেণীটি অভিসারী হলেই Σu_n শ্রেণীটি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : মনে কর

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

এবং $\sigma_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

যেহেতু $u_n \leqslant v_n$; $n = 1, 2, \cdots$, সেহেতু $s_n \leqslant \sigma_n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

এখন Σv_n অভিসারী বলে আমরা লিখতে পারি

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

যেহেতু শ্রেণী দুইটির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক, সেহেতু $\sigma_n < \sigma$ এবং যেহেতু $s_n \leqslant \sigma_n$, সেহেতু $s_n < \sigma$.

অতএব $\{ s_n \}$ ক্রমটি উচ্চ সপ্রান্ত এবং ক্রমটি একদিষ্ট আরোহী, সুতরাং $\{ s_n \}$ ক্রমের একটি সীমা থাকবে।

$$\therefore \lim_{n \to \infty} s_n = s$$

স্পষ্টতঃই $s \leqslant \sigma$

মন্তব্য: উপরোক্ত উপপাদ্যের মত নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যেতে পারে।

উপপাদ্য 8. দুইটি শ্রেণী Σu_n এবং v_n যদি এমন হয় যে $u_n \geqslant v_n$; $n = 1, 2, \cdots$; $u_n > 0, v_n > 0$; তবে Σv_n শ্রেণীটি অপসারী হলেই Σu_n শ্রেণীটি অপসারী হবে।

উদাহরণ: মনে কর

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

এখানে ধর $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad u_n \geqslant v_n \; ; \quad n = 1, 2, \cdots, \quad u_n > 0, \; v_n > 0$$

কিন্তু Σv_n শ্রেণীটি অপসারী। অতএব উপপাদ্য 8 অনুসারে Σu_n শ্রেণীটি অপসারী।

মন্তব্য। উপপাদ্য 7 এবং 8 নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যেতে পারে:

উপপাদ্য 9. যদি Σu_n এবং Σv_n শ্রেণী দুইটি এমন হয় যে $u_n > 0$ $v_n > 0$ এবং $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ ক্রমটির সীমা শূন্য বাদে একটি সংখ্যা, তাহলে দুইটি শ্রেণী একযোগে অভিসারী বা অপসারী হবে।

উদাহরণ: মনে কর $\sum u_n = \sqrt{\frac{1}{2^3}} + \sqrt{\frac{2}{3^3}} + \sqrt{\frac{3}{4^3}} + \cdots\cdots$

এখানে $u_n = \sqrt{\frac{n}{(n+1)^3}}$

মনে কর $v_n = \frac{1}{n}$

$\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$; যেহেতু $\left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$ ক্রমটির সীমা শূন্য বাদে একটি সংখ্যা,

Σu_n এবং Σv_n উভয় একযোগে অভিসারী অথবা অপসারী। কিন্তু আমরা জানি Σv_n একটি অপসারী শ্রেণী। অতএব Σu_n শ্রেণীটি অপসারী হবে।

মন্তব্য ঃ যদি Σu_n শ্রেণীটি অভিসারী হয় তবে $\Sigma \mid u_n \mid$ শ্রেণীটি অভিসারী হতেও পারে বা নাও হতে পারে। যখন $\Sigma \mid u_n \mid$ শ্রেণীটি অভিসারী তখন Σu_n শ্রেণীটি **অবাধ অভিসারী** (unconditional বা absolutely convergent) বলে; অন্যথায় Σu_n শ্রেণীকে **সবাধ অভিসারী** (conditional বা non-absolutely-convergent) বলে। উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ শ্রেণীটি সবাধ অভিসারী, কারণ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$ শ্রেণীটি অপসারী। ধনাত্মক শ্রেণীর ক্ষেত্রে যে শ্রেণীটি অভিসারী সেটি অবাধ অভিসারী হবেই।

শ্রেণীর অন্যান্য উদাহরণ ঃ

1. মনে কর $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+1)(n+5)}$

যদি $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ হয়, তবে $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

এখন যেহেতু Σv_n অপসারী, Σu_n অপসারী হবে।

2. মনে কর $\sum u_n = \frac{1}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{3}{5.7}+\cdots$

এখানে $u_n = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

যদি $v_n = \frac{1}{n}$ হয়, তবে $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{4}$

যেহেতু Σv_n অপসারী, Σu_n অপসারী হবে।

3. মনে কর $\sum u_n = \sum \frac{n+1}{n}$

যেহেতু Σu_n একটি ধনাত্মক শ্রেণী এবং $\lim_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$,

Σu_n শ্রেণীটি অপসারী।

4. মনে কর $\sum u_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

$$= \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$$

যেহেতু $\lim_{n \to \infty} u_n = \infty \neq 0$,

সেহেতু Σu_n শ্রেণীটি অপসারী।

5. মনে কর $\sum u_n = \sum \frac{1}{4^n + 3}$

যদি $v_n = \frac{1}{4^n}$ হয়, তবে $u_n < v_n$

এখন Σv_n অভিসারী, অতএব Σu_n অভিসারী হবে।

বিবিধ অনুশীলনী 3

সেটের অনুশীলনী :

1. নিম্নলিখিত সেটটির সীমাগুলি বাহির কর :

$$\left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4} \ldots\ldots \right\}$$

[উত্তর 1 এবং −1]

2. প্রমাণ কর সসীম সংখ্যক বাস্তব সংখ্যার সেটের কোন সীমা নাই।

3. নিম্নলিখিত সেটগুলির সীমা বাহির কর

(i) $\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right\}$; m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

(ii) $\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right\}$; m, n, p ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

[উত্তর (i) $0, \frac{1}{m}$; (ii) $0, \frac{1}{m}, \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$]

ক্রমের অনুশীলনী

4. দেখাও যে নিম্নলিখিত ক্রমটি অভিসারী

$$\sqrt{2};\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots\ldots$$

5. যদি $a_1 > 2$ এবং $a_{n+1} = \dfrac{6}{1+a_n}$ হয়, প্রমাণ কর $\{a_n\}$ ক্রমটির সীমা 2

6. যদি $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ হয়, তবে দেখাও যে $\{a_n\}$ ক্রমটি সপ্রান্ত এবং ক্রমটি অভিসারী।

7. দেখাও যে $\{a_n\}$ ক্রমটির সীমা 3, যখন $a_1 = \sqrt{6}$ এবং

$$a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}.$$

[**সঙ্কেত :** $a_n{}^2 = 6 + a_{n-1}$; যদি $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ হয় তবে

$l^2 = 6 + l$ অর্থাৎ $l^2 - l - 6 = 0$]

8. সীমা নির্ধারণ কর :

(i) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n}$ [উত্তর 0]

(ii) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$ [উত্তর e^2]

(iii) $\lim_{n \to \infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}} \right]$ [উত্তর ∞]

9. যদি $\lim_{n \to \infty} a_n = l$ হয়, দেখাও যে

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = l$$

প্রমাণ কর $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$

দেখাও যে $\left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right\}$ ক্রমটি অভিসারী।

10. প্রমাণ কর :

$$\underset{n\to\infty}{Lt} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

শ্রেণীর অনুশীলনী

11. যদি $\sum u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots$

এবং $\sum v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

হয়, দেখাও যে

(i) $\sum u_n = \frac{3}{4}$

(ii) $n^2 \geqslant \frac{n(n+2)}{3}$ এবং $\sigma_n \leqslant 3s_n \leqslant \frac{9}{4}$,

$s_n = u_1 + \cdots + u_n,\ \sigma_n = v_1 + \cdots + v_n,$

(iii) Σv_n একটি অভিসারী শ্রেণী।

12. যদি $\sum u_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ হয়,

তবে দেখাও যে শ্রেণীটি অভিসারী যখন $p > 1$ এবং শ্রেণীটি অপসারী যখন $p \leqslant 1$.

13. দেখাও যে নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলি অভিসারী :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{3n^4+1}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n+5}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$, (vi) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$

14. দেখাও যে নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলি প্রকৃত অপসারী :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n\sqrt{n+1}}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$, (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

(v) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\cdots$

(iv) $\frac{1}{1+2^{-1}}+\frac{2}{1+2^{-2}}+\frac{3}{1+2^{-3}}+\cdots$

15. যদি Σu_n শ্রেণীটির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক হয় এবং

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

তবে দেখাও যে শ্রেণীটি অভিসারী যখন $l<1$ এবং শ্রেণীটি অপসারী যখন $l>1$

[ডি আলেমবার্টের পরীক্ষা]

16. যদি Σu_n শ্রেণীটির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক হয় এবং

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l,$$

তবে দেখাও যে শ্রেণীটি অভিসারী যখন $l<1$ এবং শ্রেণীটি অপসারী যখন $l>1$

[কসির পরীক্ষা]

17. যদি Σu_n শ্রেণীটির প্রত্যেকটি পদ ধনাত্মক হয় এবং

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=l,$$

তবে দেখাও যে শ্রেণীটি অভিসারী যখন $l>1$ এবং শ্রেণীটি অপসারী যখন $l<1$

[রাবির পরীক্ষা]

18. নিম্নলিখিত শ্রেণীটির ক্ষেত্রে দেখাও ডি আলেনবার্টের পরীক্ষা প্রমাণ করে শ্রেণীটি অভিসারী হবে যখন $x<1$ এবং অপসারী হবে যখন $x>1$; আবার রাবির পরীক্ষা প্রমাণ করে শ্রেণীটি অভিসারী যখন $x=1$:

$$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\cdots(x>0).$$

চতুর্থ অধ্যায়

ফাংশনের সীমা ও অবিচ্ছিন্নতা

4.01 প্রাথমিক মন্তব্য

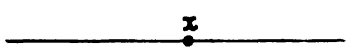
এই অধ্যায়ে ফাংশনের দুটি প্রয়োজনীয় ধারণার—যথা সীমার ধারণার এবং অবিচ্ছিন্নতার ধারণার—কথা বলা হবে। ক্রমের সীমার আলোচনায় পূর্ব অধ্যায়ে দেখা গেছে n যখন বড় হতে হতে অসীমে (∞) পৌঁছায় তখন ক্রমের সাধারণ বস্তুটি অর্থাৎ a_n যে সংখ্যার কাছে পৌঁছায় সেই সংখ্যাটি ক্রমের সীমা। আবার ক্রম তো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা-চলের একটি ফাংশন অর্থাৎ $a_n = f(n)$, যেখানে নিরপেক্ষ চলরাশিটি (অর্থাৎ n) 1, 2, 3 এই সবমান ধারণ করতে করতে অসীমে চলে যায়। অতএব ক্রমই বলো বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা-চলের ফাংসন বলো এরূপ ক্ষেত্রে সীমার ধারণায় দুইটি বস্তুর পরিবর্তনের শেষ পরিণতি লক্ষ্য করা হয় অর্থাৎ n এর পরিবর্তনের শেষ পরিণতি এবং a_n বা $f(n)$ এর পরিবর্তনের শেষ পরিণতি।

সঙ্কেত চিহ্ন হিসাবে লেখা যায়

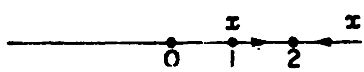
$$\text{যখন } n \to \infty, \text{ তখন } a_n \equiv f(n) \to \ ?$$

অর্থাৎ যখন $n \to \infty$, তখন $a_n \equiv f(n)$ যে সসীম সংখ্যার কাছে পৌঁছায় সেই সসীম সংখ্যাটি আমরা a_n বা $f(n)$ এর সীমা বলি। যখন $a_n \equiv f(n) = n^2$, তখন $a_n \equiv f(n) \to \infty$, এক্ষেত্রে ∞ সংখ্যা নয় বলে আমরা ∞ কে সীমা বলি না।

এখন নিরপেক্ষ বাস্তব চলরাশির ফাংশন অর্থাৎ $f(x)$ এর সীমার কথা বলা হবে। এই স্বাধীন বাস্তব চলরাশির অঞ্চল তো সমস্ত বাস্তব অক্ষরেখা, তাহলে এই স্বাধীন বাস্তব চলরাশিটি কোন্ সংখ্যার কাছে পৌঁছায় তা সঠিকভাবে না বললে ফাংশনের সীমার আলোচনা করা যায় না। এই বাস্তব অক্ষরেখার উপর যে কোন একটি বাস্তব



বাস্তব অক্ষরেখা



সংখ্যার কাছে x পৌঁছাতে পারে। মনে কর $x \to 2$; এর দ্বারা আমাদের বুঝতে হবে যে x বাম দিক থেকে 2 এর কাছে পৌঁছায় এবং x ডানদিক থেকেও 2 এর

কাছে পৌঁছায়। এরূপ অবস্থায় x চলরাশিটি 2 এর যত কাছে সম্ভব পৌঁছাতে পারে ; কিন্তু কখনই $x=2$ নয়। অতএব $x\to 2$ সঙ্কেত চিহ্নটির অর্থ নিম্নরূপ

(i) $x\neq 2$

(ii) $x\to 2-0$

(iii) $x\to 2+0$

এখন $x\to 2-0\Rightarrow x$ চলরাশিটি 2 এর চেয়ে কম এবং 2 এর যত সম্ভব তত কাছে, কিন্তু $x\neq 2$; আবার $x\to 2+0\Rightarrow x$ চলরাশিটি 2 এর চেয়ে বড় এবং 2 এর যত কাছে সম্ভব তত কাছে, কিন্তু $x\neq 2$. x এর দুই দিক থেকে 2 এর কাছে পৌঁছানোর সঙ্গে সঙ্গে $f(x)$ এর মানের পরিবর্তন হয়। অতএব ফাংশনের সীমার ধারণায় নিম্নলিখিত দুইটি বিষয়ের আলোচনা দরকার :

যখন $x\to 2$, তখন $f(x)\to$?

অর্থাৎ যখন $x\to 2$, তখন $f(x)$ কোন্ সসীম সংখ্যার কাছে ? যদি কোন সসীম সংখ্যার কাছে $f(x)$ পৌঁছায় তবে সেই সসীম সংখ্যাটি $f(x)$ এর সীমা যখন $x\to 2$; এখন যেহেতু $x\to 2\Rightarrow x\to 2-0$ এবং $x\to 2+0$, সেহেতু $x\to 2-0$ এর সময় $f(x)$ কোন্ সসীম সংখ্যার কাছে পৌঁছায় দেখতে হবে এবং $x\to 2+0$ এর সময় $f(x)$ কোন্ সসীম সংখ্যার কাছে পৌঁছায় দেখতে হবে। এখন সাধারণভাবে বলা যায় যে যখন $x\to a-0$ (a একটি বাস্তব সংখ্যা) তখন যদি $f(x)$ এর সংগত মানগুলি কোন সসীম সংখ্যা l_1 এর কাছে পৌঁছায় (অথবা $f(x)$ এর মান সর্বত্র l_1 এর সমান থাকে) তাহলে l_1 কে $f(x)$ এর **বামদিকের সীমা** (left-hand limit) বলে। সঙ্কেত চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=l_1 \;.$$

আবার যখন $x\to a+0$ তখন যদি $f(x)$ এর সঙ্গত মানগুলি কোন সসীম সংখ্যা l_2 এর কাছে পৌঁছায় (অথবা $f(x)$ এর মান সর্বত্র l_2 এর সমান হয়), তাহলে l_2 কে $f(x)$ এর **ডানদিকের সীমা** (right-hand limit) বলে। সঙ্কেতচিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=l_2$$

এখন যদি $l_1 = l_2$ হয়, তাহলে $l_1 = l_2 = l$ (মনে কর) কে $f(x)$ এর **সীমা** (limit) বলা হয় যখন $x \to a$; সঙ্কেতচিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

অর্থাৎ যখন $x \to a$, তখন $f(x) \to l$ হতে হলে নিম্নলিখিত সর্তগুলি সিদ্ধ হবে ঃ—

(i) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ বিদ্যমান

(ii) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ বিদ্যমান

(iii) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

ফাংশনের এই সীমার ধারণা ও নিয়ম এই অধ্যায়ে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হবে।

ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা

অবিচ্ছিন্নতা কথাটি আমাদের কাছে নূতন নয়—কোন কিছুর মধ্যে যদি কোন ফাঁক বা ছেদ না থাকে তবে আমরা তাকে অবিচ্ছিন্ন বলি। জ্যামিতির একটি সরলরেখা, বৃত্ত, অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত লক্ষ্য করলে বুঝা যায় সরল বা বক্ররেখাগুলি অবিচ্ছিন্ন অর্থাৎ উহাদের মধ্যে কোন ফাঁক বা ছেদ নাই। এখন একচলরাশির ফাংশনের দ্বিমাত্রিক দেশে একটি লেখচিত্র পাওয়া যায়, এই লেখচিত্রের কোন এক বিন্দুতে যদি ছেদ বা ফাঁক না থাকে তবে স্বভাবতঃই ঐ লেখচিত্র ঐ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, এইভাবে লেখচিত্রের যে কোন বিন্দুতে যদি কোন ছেদ না থাকে তবে লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে অবিচ্ছিন্ন। জ্যামিতির এই অবিচ্ছিন্নতার ধারণা থেকেই ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার ধারণা এসেছে—তবে লেখচিত্রের অবিচ্ছিন্নতা জ্যামিতিক ভাষায় প্রকাশ করতে গেলে কখনও কখনও ভ্রান্তি আসে। যেমন যদি কোন ফাংশন অঞ্চলের একটিমাত্র বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে ঐ অঞ্চলে ফাংশনের লেখচিত্রে একটি বিন্দুর অনুপস্থিতি ঘটে, কিন্তু জ্যামিতিতে একটি বিন্দু আঁকা বা বাদ দেওয়া অসম্ভব ব্যাপার, সুতরাং সঠিক লেখচিত্র দেখলে মনে হবে উহা এক রকম অবিচ্ছিন্ন। তাই ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা জ্যামিতিক ভাষায় প্রকাশ না করে গাণিতিক উপায়ে বা সংখ্যাভিত্তিক উপায়ে প্রকাশ করতে হয়। মনে কর $y = f(x)$ একটি ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে এবং একমাত্রিক দেশে 'a' এর কোন অঞ্চলে সঠিকভাবে বর্ণিত, তাহলে লিখতে পারা যায় $b = f(a)$; এখন

a যদি সামান্য ছোট বা বড় করা হয় অর্থাৎ যদি $x=a+h$ (h ধনাত্মক বা ঋনাত্মক) হয়, তবে $f(x)$ এর মানও পরিবর্তিত হবে। মনে কর

$$b+k=f(a+h)$$

অথবা $\quad k=f(a+h)-b=f(a+h)-f(a)$

এখন যদি $k\to 0$, যখন $h\to 0$, তবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনকে **অবিচ্ছিন্ন** বা **সন্তত** (continuous) বলা হয়। অর্থাৎ যখন x চলরাশিটি a থেকে $a+h$ তে পরিবর্তিত হয়, h যতই ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র (infinitesimal) হোক না কেন, তখন যদি ফাংশনের মানের পরিবর্তনের মাপাঙ্ক $|f(a+h)-f(a)|$ ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র হয়, তবে $f(x)$ ফাংশনকে $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয়। $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ আলোচনার সময় $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে সংজ্ঞিত হবার প্রয়োজন নাই, কিন্তু $f(x)$ এর $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার আলোচনায় ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে এবং 'a' এর কোন অঞ্চলে সংজ্ঞিত হওয়ার প্রয়োজন। অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞানুযায়ী আমরা দেখি যে যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে

$$\lim_{x\to a}\,[f(a+h)-f(a)]=0$$

পুনরায় $a+h=x$ লিখলে দেখা যায় যখন $h\to 0$, তখন $x\to a$;

তাহলে $\quad \lim\limits_{x\to a}\,[f(x)-f(a)]=0$

অর্থাৎ $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

অর্থাৎ $\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right)$

উপরোক্ত সমতা থেকে দেখা যায় $f(x)$ ফংশনটি যদি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ এর মধ্যে কোন প্রভেদ থাকে না। অবিচ্ছিন্নতার এই ধর্ম অনেক সময় সীমা নির্ধারণের কাজে লাগানো যেতে পারে ; যদি দেখা যায় $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন তবে $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ নির্ধারণের সময় $f(x)$ তে $x=a$ বসিয়ে যে মান যথা $f(a)$ পাওয়া যায় উহাই $\lim\limits_{x\to a} f(x)$। তৃতীয়

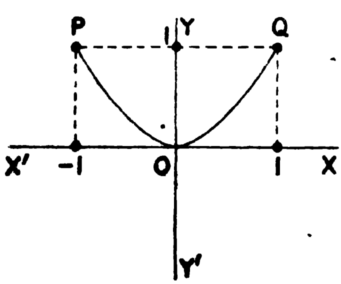
অধ্যায়ে আমরা পাঠকদের সাবধান করে দিয়েছি যে $\lim_{x \to a} f(x)$ নির্ধারণের সময় $x = a$ নয়, কারণ প্রকৃতপক্ষে $x \to a$ বলতে বুঝায় $x \to a+0$ এবং $x \to a-0$ $(x \neq a)$; অতএব সীমার সংজ্ঞা অনুসারে $\lim_{x \to a} f(x)$ এবং $f(a)$ এর মধ্যে প্রভেদ থাকতেও পারে, কিন্তু যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তাহলে $\lim_{x \to a} f(x)$ এবং $f(a)$ এর মধ্যে কোন প্রভেদ নাই।

আলোচ্য অধ্যায়ে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার ধারণা বিবিধ উদাহরণের সাহায্যে পরিষ্কারভাবে বলা হবে। ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার বিভিন্ন ধর্মের কথাও আলোচনা করা হবে। আমরা দ্বিতীয় ও তৃতীয় অধ্যায়ে বিশেষভাবে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাচলের ফাংশন সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। বাস্তব চলরাশির ফাংশনের বিশেষ উদাহরণ, প্রকারভেদ, প্রান্তবিন্দু ইত্যাদির সম্পর্কে আলোচনা করে নিয়ে ফাংশনের সীমা ও অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করার আগে ফাংশনের কতকগুলি প্রয়োজনীয় ধারণার অবতারণা করা হবে।

4.02 ফাংশনের নানারকম উদাহরণ :

ফাংশনের সীমার কথা বলার আগে নানারকম ফাংশনের উদাহরণ দেওয়া হবে।

উদাহরণ 1. মনে কর $y = f(x)$, যখন $f(x) = x^2$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$. এখানে x এর অঞ্চল (Domain) $-1 \leqslant x \leqslant 1$, এই অঞ্চলে x এর প্রতিটি মানের জন্য y সঠিকভাবে সংজ্ঞিত (defined)। যেমন, যখন $x = -1$, তখন $y = (-1)^2 = 1$; আবার যখন $x = 0$, তখন $y = 0$; আবার যখন $x = 1$, তখন $y = 1$; লক্ষ্য করা যায় x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটিমাত্র মান



পাওয়া যায়; এজন্য এরূপ ফাংশনকে **একক মানবিশিষ্ট** (single valued) ফাংশন বলা হয়। **স্থানাঙ্ক** জ্যামিতির সাহায্যে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করলে

ফাংশনের ধারণা পরিষ্কার হয়। পূর্বে উপরোক্ত ফাংশনের লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে ঃ প্রদত্ত x এর অঞ্চলের জন্য লেখচিত্র যেটুকু অঙ্কন করা হয়েছে (যথা POQ) তার বেশি অঙ্কন করা উচিত নয়। সহজেই দেখা যায় এখানে y এর প্রতিটি মান ধনাত্মক (শূন্য সমেত) অর্থাৎ $y \geqslant 0$, এবং $y \leqslant 1$; অতএব y এর মানের এলাকা $0 \leqslant y \leqslant 1$. এখন যদি মনে করি

$$X \equiv [-1, 1] \text{ এবং } Y \equiv [0, 1]$$

তাহলে f যেন একটি **রূপান্তর** (Mapping) যার দ্বারা X সেটের বস্তুগুলি Y সেটের বস্তুগুলিতে রূপান্তরিত হয়। প্রতীকচিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$f: \quad X \rightarrow Y \quad (\text{from } X \text{ into } Y)$$

$$\text{অথবা} \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

প্রতি $a \in X$ এর জন্য রূপান্তরিত বস্তু $f(a)$, তাই $x = a$ তে $f(x)$ এর মান (value) $f(a)$।

এখন যদি x এর অঞ্চল সমস্ত বাস্তব অক্ষরেখা (R) ধরা হয়, তাহলে উপরোক্ত রূপান্তর প্রতীকচিহ্নের সাহায্যে লেখা যায়

$$f: \quad R \rightarrow R.$$

এক্ষেত্রে লেখচিত্রটি অসীম ; লেখচিত্রে সমস্ত বিন্দুগুলি (x, x^2), $x \in R$ সংস্থাপন করলে দেখা যায় $f(x)$ এর মানগুলি শূন্য অথবা যে কোন ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা অর্থাৎ $f(x)$ এর মানগুলি একটি সেট $f[R]$ তৈরী করে যথা—$f[R] = \{x^2, x \in R, x \geqslant 0\}$ এখন উপরোক্ত ফাংশনের বিশেষ কতকগুলি ধর্ম লক্ষ্য করা হবে। যদি x কে বস্তু (object) বলা হয়, তবে $f(x)$ যেন x এর প্রতিবিম্ব বা প্রতিচ্ছবি (image)। যদি f এমন একটি ফাংশন হয় যাতে $f(a) = f(b)$ হইলে $a = b$ বুঝায়, তাহলে f কে $1-1$ (one to one) বা এক-একী ফাংশন বলা হয়। এখন দেখা যাক উপরোক্ত ফাংশনটি $1-1$ কিনা। যেহেতু $f(2) = f(-2) = 4$, কিন্তু $2 \neq -2$, সেহেতু এই ফাংশনটি $1-1$ নয়।

আবার যদি f এমন হয় যাতে $f[X] = Y$ হয় তাহলে f কে সর্বব্যাপী (onto) বলা হয়। এখানে যেহেতু $f[R] \subset R$, f ফাংশনটি **সর্বব্যাপী** নয়।

মন্তব্য ঃ

(১) উচ্চগণিতে $y=f(x)$ কে ফাংশন বলা হয়, যদি প্রতি x এর জন্য y এর একটিমাত্র মান থাকে। এখানে $y=x^2$ এই সংজ্ঞানুসারে যথার্থই একটি ফাংশন।

(২) $y=x^2$ হইলে বীজগণিতের সাহায্যে আমরা পাই $x=\sqrt{y}$; এখন দেখা যাক উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে $x=\sqrt{y}$ যথার্থ একটি ফাংশন কিনা। যেহেতু প্রতি y এর মানের জন্য x এর দুটি করিয়া মান থাকে, সেহেতু $x=\sqrt{y}$ কে ফাংশন বলা চলে না। তবে বর্তমান পুস্তকে যদি বলা হয় x এখানে y এর দুটি মানবিশিষ্ট ফাংশন যথা $x=f(y)\equiv\sqrt{y}$ এবং $x=g(y)\equiv-\sqrt{y}$, তাহলে কোন দোষ থাকে না। এরূপ ফাংশনকে বলা হয় **বিলোম ফাংশন** (Inverse function)।

(৩) যদি $y=f(x)$ ফাংশনটি $1-1$ এবং 'সর্বব্যাপী' হয়, তবে তার বিলোম ফাংশনের অস্তিত্ব থাকে অর্থাৎ $x=f^{-1}(y)$.

(৪) উচ্চগণিতে একক মানবিশিষ্ট ফাংশনই যথার্থ ফাংশন ; বহুমানবিশিষ্ট ফাংশনকে ফাংশনরূপে ধরতে হলে কতকগুলি একক মানবিশিষ্ট ফাংশনের সংগ্রহরূপে ধরতে হয়। এরূপ বহুমানবিশিষ্ট ফাংশনের জন্য একটি বিশেষ অঞ্চলের প্রয়োজন, সে সব আলোচনা এই পুস্তকের পরিধির মধ্যে আসে না।

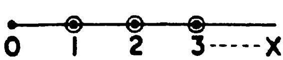
উদাহরণ 2. একটি উদাহরণ সাহায্যে দেখাও যে ক্রমকে ফাংশন আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে।

$$\text{ধর}\quad \{a_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

তাহলে লেখা যেতে পারে

$$f(n)\equiv a_n=\frac{n}{n+1}\ ;\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

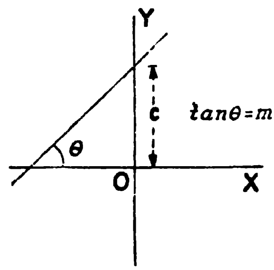
এখানে লক্ষ্য করা উচিত যে স্বাধীন চলরাশিটি n এবং এই চলরাশির অঞ্চল বলতে বুঝায় বাস্তব অক্ষরেখার উপর স্বাভাবিক সংখ্যা বিন্দুগুলি · অতএব n চলরাশিটি সাধারণ ফাংশনের x চলরাশির মত নয়, x চলরাশিটি অঞ্চলের প্রত্যেকটি বাস্তবসংখ্যার



মান ধারণ করে, কিন্তু n চলরাশিটি কেবলমাত্র ধনাত্মক পূর্ণ বাস্তবসংখ্যার মান ধারণ করে। যথা $n=1$ হইলে $f(1)=\frac{1}{2}$; $n=2$ হইলে $f(2)=\frac{2}{3}$; ইত্যাদি।

বিপরীতভাবে বলা যায় প্রত্যেক ধনাত্মক পূর্ণ বাস্তবসংখ্যার চলরাশির ফাংশন একটি ক্রম।

উদাহরণ 3. $f(x)=mx+c$, m এবং c দুটি ধ্রুবক। এই ফাংশনটি **রৈখিক ফাংশন** (linear function), কারণ এই ফাংশনটির লেখচিত্র একটি



সরলরেখা $(y=mx+c)$। এখানে x চলরাশিটির অঞ্চল বাস্তব অক্ষরেখার মুক্ত অন্তরাল $(-\infty, \infty)$। এখন যদি নিম্নলিখিত সর্তটি $f(a+b)=f(a)+f(b)$ সিদ্ধ হয়, তবে রৈখিক ফাংশনটি কিরূপ ?

লক্ষ্য কর $f(a)=am+c$

$$f(b)=bm+c$$

$$f(a+b)=(a+b)\ m+c$$

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তটি থেকে পাওয়া যায়

$$(a+b)\ m+c=am+c+bm+c$$

$$=(a+b)\ m+2c$$

$$\therefore\quad 2c=c \quad \text{অর্থাৎ} \quad c=0$$

তাহলে প্রদত্ত সর্তটি সিদ্ধ হতে হলে ফাংশনটি হবে $f(x)=mx$, একে **রৈখিক সমমাত্রিক** (homogeneous) ফাংশন বলে। রৈখিক সমমাত্রিক ফাংশনের নিম্নলিখিত ধর্মগুলি সহজেই প্রমাণ করা যেতে পারে

$$f(ab)=af(b)$$

এবং $f(ab)=bf(a)$

উদাহরণ 4. মনে কর $f(x)=x^n$, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখানে x এর অঞ্চল সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট। এই অঞ্চলে $f(x)$ এর মান নির্ভর করে n এর যুগ্মতার বা অযুগ্মতার উপর। যখন n যুগ্ম, তখন $f(x)$ এর মানের এলাকা $[0, +\infty]$ এবং যখন n বিযুগ্ম, তখন $f(x)$ এর মানের এলাকা সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট।

উদাহরণ 5 $f(x) = x^{-n}$, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এরূপ ফাংশনের x এর অঞ্চলের মধ্যে শূন্য (0) থাকতে পারে না।

উদাহরণ 6 মনে কর $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x+1}$, $x \neq -1$

প্রমাণ কর $f(0) = -3$, $f(2a) = \dfrac{4a^2 - 3}{2a+1}$, $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1 - 3b^2}{b(1+b)}$

উদাহরণ 7 যদি $f(x) = e^x$ হয়, প্রমাণ কর $f(a+b) = f(a)\,f(b)$

এখানে $f(a+b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a)\,f(b)$

উদাহরণ 8 যদি $f(x) = \log_e x \ (x > 0)$ হয়, প্রমাণ কর

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

এখানে $f(ab) = \log_e(ab) = \log_e a + \log_e b = f(a) + f(b)$

উদাহরণ 9 যদি $f(x) = x^2 + 2x$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + 2 + h$$

এখানে $f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h)$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - (x^2 + 2x)}{h}$$

$$= 2x + 2 + h$$

উদাহরণ 10 **মাপাঙ্ক ফাংশন,** অর্থাৎ

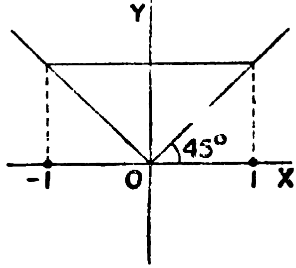
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x, \text{ যদি } x > 0 \\ &= -x, \text{ যদি } x < 0 \end{aligned}\right\}$$

এখানে x এর অঞ্চল $(-\infty, +\infty)$। তাহলে $f(x) \equiv y \geqslant 0$

উপরোক্ত ফাংশনটি মাপাঙ্কের মাধ্যমে লিখলে পাওয়া যায়—

$$f(x) = |x|$$

এখানে লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে নিম্নলিখিত দুটি লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে ঃ



(মাপাঙ্ক ফাংশনের লেখচিত্র)

(i) $y = x, \; x \geqslant 0$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মত $y = x$ সব রেখাটি না আঁকিয়া শুধুমাত্র শূন্য সমেত সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য রেখাটি আঁকতে হবে।

(ii) $y = -x, x > 0$

সহজেই লক্ষ্য করা যায় উপরোক্ত রেখা দুটি '0' বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

উদাহরণ 11 বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা ফাংশন:

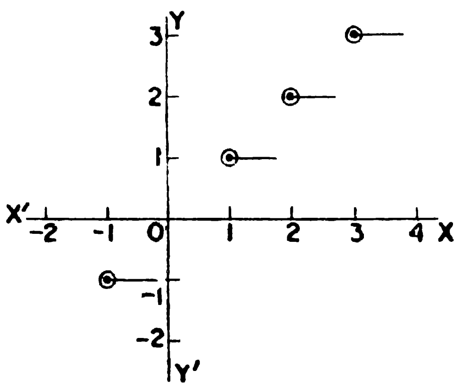
মনে কর $f(x) = [x]$

$[x]$ প্রতীকটির অর্থ এমন বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা n, যার দ্বারা $n \leqslant x$ সিদ্ধ হয়।

অতএব $[0] = 0$, $[\frac{1}{2}] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-1] = -1$,

$[-\frac{1}{2}] = -1$, $[-\sqrt{2}] = -2$ ইত্যাদি।

এখানে x এর অঞ্চল $(-\infty, +\infty)$। লেখচিত্রের খানিকটা অংশ নীচে দেওয়া হল:



উদাহরণ 12 নিম্নলিখিত ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর:

$$f(x) = x, \text{ যদি } x < 0$$
$$= x^2, \text{ যদি } 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$= 1, \text{ যদি } x > 1$$

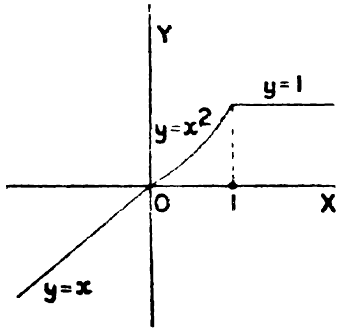
লেখচিত্র অঙ্কন করবার সময় লক্ষ্য করতে হবে

(i) $y = x, \quad x < 0$

(ii) $y = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

(iii) $y = 1, \quad x > 1$

অতএব ঋণাত্মক বাস্তব x এর জন্য $y=x$ এর লেখ, $0 \leqslant x \leqslant 1$ এর জন্য $y=x^2$ এর লেখ এবং $x > 1$ এর জন্য $y=1$ এর লেখ অঙ্কন করতে হবে।



উপরোক্ত কয়েকটি ফাংশনের উদাহরণ থেকে বুঝা যায় যে ফাংশন সবসময় একটি মাত্র রাশির দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব নয়।

উদাহরণ 13 মনে কর

$$f(x)=5, \quad -\infty < x < \infty$$

এখানে ফাংশনটি বহু-একী (many to one)

4.03 ফাংশনের প্রকারভেদ

এখন ফাংশনের প্রকারভেদ সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। মনে কর

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$$

একটি বহুপদী রাশি যার সহগগুলি বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে প্রতি বাস্তবসংখ্যা x এর সঙ্গত একটি বাস্তব সংখ্যা এই বহুপদ রাশি থেকে পাওয়া যায়। অতএব আমরা লিখতে পারি

$$f(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$$

উহাকে **বহুপদ ফাংশন** (polynomial function) বলে। বীজগণিত থেকে আমরা জানি যে যখন $n > 0$, তখন অধিকপক্ষে n সংখ্যক স্বতন্ত্র বাস্তব সংখ্যা এমন আছে যেখানে ফাংশনের মান শূন্য। এরূপ n সংখ্যক সংখ্যার প্রত্যেকটিকে বহুপদ ফাংশনের **'শূন্য'** (zero) অথবা $f(x)=0$ এই বহুপদ সমীকরণের **'বীজ'** (root) বলে।

বহুপদ ফাংশনের উদাহরণ ঃ

(১) $f(x)=3x+2$

(২) $f(x)=5x^2-3x+2$

(৩) $f(x)=x^5-4x^3+7x^2-3x+8$ ইত্যাদি।

পরক্ষণে ধর—

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

m এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (এবং প্রত্যেক $b_i \neq 0$)। এখন প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা x (যেখানে $Q(x)\neq 0$) এর সঙ্গত একটি বাস্তব সংখ্যা যথা

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

সবসময় সংজ্ঞিত (defined)। এরূপ ফাংশনকে **র‍্যাসানাল ফাংশন** (Rational function) বলা হয়।

'র‍্যাসানাল' (rational) ফাংশনের উদাহরণ ঃ

(১) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$; $x\neq -\frac{d}{c}$

(২) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}$; $x\neq \pm 2$ ইত্যাদি।

অতএব দেখা যাচ্ছে যে 'র‍্যাসানাল' (rational) ফাংশনের x এর অঞ্চলের মধ্যে $Q(x)=0$ এর বাস্তব বীজগুলি থাকতে পারে না। লক্ষ্য করা উচিত বহুপদ ফাংশন 'র‍্যাসানাল' (rational) ফাংশনের একটি বিশেষ ধরণের ফাংশন।

'ইরর‍্যাসানাল' ফাংশনের (Irrational function) উদাহরণ ঃ

(২) $f(x)=\sqrt{x}$

(২) $f(x)=\frac{2x^2+\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}$ ইত্যাদি।

উপরের প্রত্যেকটি 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) ফাংশনের উদাহরণে লক্ষ্য করা যায় ভগ্নাংশের লব বা হর 'র‍্যাসানাল' (rational) ফাংশন নয়।

উপরোক্ত তিন ধরনের ফাংশন যথা ঃ বহুপদ ফাংশন, 'র‍্যাসানাল' (rationa) ফাংশন, 'ইরর‍্যাসানাল' (irrational) ফাংশন, একটি বিশেষ ফাংশন গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত। এই বিশেষ ফাংশন গোষ্ঠীর নাম **মূলদ ফাংশনগোষ্ঠী** (class of

algebraic function)। $y=f(x)$ একটি মূলদ ফাংশন হবে যদি নিম্নলিখিত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x) = 0,$$

যেখানে $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$, $P_n(x)$ এগুলি কতক বহুপদ রাশি। যে ফাংশনটি মূলদ ফাংশন নয় তাকে **অমূলদ ফাংশন** (non-algebraic বা transcendental function) বলে। যখন $y=\sin x$ বা $\cos x$ তখন উভয় ফাংশনের x এর অঞ্চল সমস্ত বাস্তব অক্ষরেখা এবং ফাংশনের মানগুলির এলাকা একটি বদ্ধ অন্তরাল যথা $[-1, 1]$; কিন্তু এই দুইটি ফাংশন কি মূলদ? যেহেতু $y=\sin x$ বা $\cos x$ নিম্নলিখিত কোন সমীকরণ সিদ্ধ করে না

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x) = 0,$$

সেহেতু এই ফাংশন দুটি অমূলদ।

অমূলদ ফাংশনের উদাহরণ ঃ

$$f(x) = a^x \ ; \ a \neq 0, 1 \ ;$$

$f(x) = \log_a x$, $a \neq 0, 1$; সমস্ত ত্রিকোণমিতির ফাংশন এবং বিলোম ফাংশন যথা $f(x) = \sin^{-1} x$, ইত্যাদি ; এবং কতকগুলি পরাবৃত্ত সম্বন্ধীয় (hyperbolic) ফাংশন—এই ফাংশনগুলি নিম্নে দেওয়া হল ঃ

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \text{ ইত্যাদি।}$$

যখন ফাংশনটি x এর একটি রাশি হিসাবে পরিষ্কারভাবে লেখা থাকে তখন ফাংশনটিকে **প্রত্যক্ষ ফাংশন** (explicit function) বলে। যথা

$$y = ax^2 + bx + c \text{ বা } y = e^x + \sin x$$

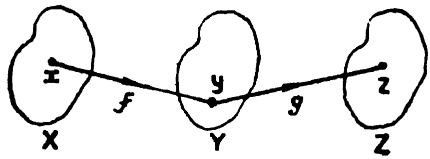
আবার যখন ফাংশনটি স্পষ্টভাবে x এর একটি রাশি হিসেবে লেখা থাকে না তখন ফাংশনটিকে **পরোক্ষ ফাংশন** (implicit function) বলে। যথা

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

4.04 ফাংশনের ফাংশন

মনে কর তিনটি সেট আছে—যথা X, Y এবং Z ; এখন f একটি ফাংশন যার দ্বারা X সেটের একটি বস্তু (x) এর সঙ্গত Y সেটের একটি বস্তু (y) পাওয়া যায় এবং

g একটি ফাংশন যার দ্বারা Y সেটের একটি বস্তু (y) এর সঙ্গত Z সেটের একটি বস্তু (z) পাওয়া যায়, তাহলে X সেটের একটি বস্তু (x) এর সঙ্গত Z সেটের একটি বস্তু (z) পাওয়া যাবে।



এক্ষেত্রে প্রতীকচিহ্ন হিসেবে লেখা হবে

$$z = g[f(x)]$$

অথবা $z = gOf(x)$

উদাহরণ : মনে কর

$y = f(x) = x^2$, x যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যা

$z = g(y) = \sin y$, y যে কোন বাস্তব

তাহলে $gO\,f(x) = g[f(x)] = \sin x^2$

এইভাবে ফাংশনের ফাংশন চারিটি বা অধিক সেটের মধ্যে বর্ণিত করা যেতে পারে যেমন $hO\,gO\,f(x)$। অবশ্য এরূপ ফাংশনের ক্ষেত্রে অঞ্চলগুলি ঠিকমত বর্ণিত হওয়া চাই।

যদি $g[f(x)] = x$ হয় তবে g ফাংশনটি f ফাংশনটির বিলোম ফাংশন। এরূপ ক্ষেত্রে $g = f^{-1}$ লেখা হয়।

উদাহরণ। $f(x) = \sin x$ এবং $g[f(x)] = \sin^{-1}[f(x)]$

তবে $g[f(x)] = \sin^{-1}(\sin x) = x$, অবশ্য বিলোম ফাংশনের বহুমানের প্রধান মান (principal) ধরতে হবে ; কারণ আমরা জানি,

$$\sin^{-1} x = n\pi + (-1)^n \sin^{-1} x.$$

4.05 ফাংশনের প্রান্তবিন্দু :

মনে কর $y = f(x)$ একটি ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে বর্ণিত। এখন এই বদ্ধ অন্তরালে যত বাস্তব সংখ্যা আছে তাদের প্রত্যেকটির সঙ্গত y আছে। তাহলে ফাংশনের মানগুলি একত্র করলে একটি সেট S তৈরী হয়। এই সেট S যদি উভয় প্রান্তে বদ্ধ হয় তাহলে আমরা ফাংশনটিকে **সপ্রান্ত** (bounded) বলি। অতএব ফাংশনের প্রান্তবিন্দুর ধারণা S সেটের প্রান্তবিন্দুর ধারণা থেকে পাওয়া যায়।

উদাহরণ : (১) মনে কর

$$f(x)=2+x\ ;\ -1 \leqslant x \leqslant 1$$

এখানে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্তবিন্দু 3 এবং গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্তবিন্দু 1 ; তাহলে $f(x)=2+x$ ফাংশনটি $[-1, 1]$ এই বদ্ধ অন্তরালে প্রান্তবদ্ধ অর্থাৎ $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$; শেষ অসমতাটিকে লিখতে পারা যায়—

$$-3 \leqslant f(x) \leqslant 3 \text{ অর্থাৎ } |f(x)| \leqslant 3$$

মন্তব্য : যখনই $f(x)$ ফাংশনটি কোন অন্তরালে প্রান্তবদ্ধ হয়, তখনই আমরা লিখতে পারি $|f(x)| < K$

(২) মনে কর

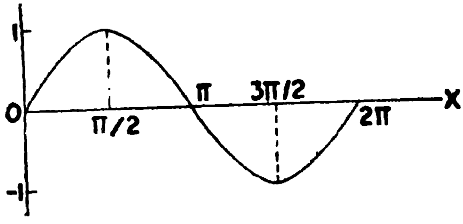
$$f(x)=\frac{1}{x}\ ;\ 0 < x < 1$$

এখানে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্তবিন্দু 1 ; কিন্তু $f(x)$ এর কোন লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্তবিন্দু নাই, কারণ x যতই শূন্যের কাছে যায় $f(x)$ এর মান ততই বৃহৎ হইতে বৃহত্তর হয়।

4.06 **একদিষ্ট ফাংশন** (Monotone function)

একটি ফাংশন $f(x)$ যদি এমন হয় যে $f(x)$ একটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$তে সঠিকভাবে **সংজ্ঞিত** এবং $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, তাহলে এই ফাংশনকে **একদিষ্ট আরোহী ফাংশন** (monotone ascending বা increasing function) বলে। অনুরূপভাবে যদি $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ হয়, তবে $f(x)$ কে **একদিষ্ট অবরোহী ফাংশন** (monotone descending বা decreasing function) বলে।

যে বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$তে, $f(x)$ ফাংশনটি **সংজ্ঞিত**, সেই বদ্ধ অন্তরালকে সসীম সংখ্যক উপঅন্তরালে (Subinterval) ভাগ করলে $f(x)$ যদি **একদিষ্ট** রূপ নেয়, তাহলে $f(x)$ কে সাধারণভাবে **একদিষ্ট** বলা হয়। যেমন $y=\text{Sin } x$ ফাংশনটি $[0, 2\pi]$ বদ্ধ অন্তরালে সাধারণভাবে **একদিষ্ট**।



$[0,2\pi]$ অন্তরালে $y=\text{Sin } x$ এর লেখ

উদাহরণ :

(i) $y=e^x$ ফাংশনটি যে কোন বদ্ধ অন্তরালে একদিষ্ট আরোহী ফাংশন কারণ $e>1$.

(ii) $y=log_e x$ $(x>0)$ ফাংশনটি যে কোন বদ্ধ অন্তরালে একদিষ্ট আরোহী ফাংশন।

উপরোক্ত একদিষ্ট ফাংশনের সংজ্ঞায় যদি 'সমতাচিহ্ন' না থাকে তাহলে ফাংশনটিকে **যথাযথ** (Strictly) একদিষ্ট ফাংশন বলে।

4.07 ধনাত্মক, ঋনাত্মক, যুগ্ম ও অযুগ্ম ফাংশন

$[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ কে **ধনাত্মক** (positive) বলা হবে যদি প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f(x) \geqslant 0$ হয়।

অনুরূপভাবে $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ কে **ঋনাত্মক** (negative) বলা হবে যদি প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f(x) \leqslant 0$ হয়।

$[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ কে **যুগ্ম** (even) ফাংশন বলা হয় যদি প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f(x)=f(-x)$ হয়।

উদাহরণ :—Cos x একটি যুগ্ম ফাংশন, কারণ $\text{Cos}(-x)=\text{Cos } x$.

অনুরূপভাবে $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ কে **অযুগ্ম** (odd) ফাংশন বলা হয় যদি প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f(x)=-f(-x)$ হয়।

উদাহরণ :—Sin x একটি অযুগ্ম ফাংশন, কারণ $\text{Sin}(-x)=-\text{Sin } x$.

ব্যতিক্রম :— e^x ফাংশনটি যুগ্ম বা অযুগ্ম কোনটাই নয়। কারণ

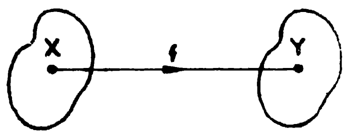
$$e^{-x} \neq e^x$$

বা $$e^{-x} \neq -e^x .$$

4.08 বহুচলরাশির ফাংশন (function of several variables)

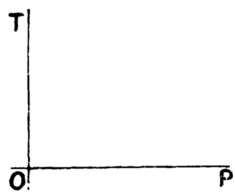
এতক্ষণ ধরে যে ফাংশন এবং তার বিভিন্ন ধর্মের কথা উল্লেখ করা হল তা সবই একচলরাশির ফাংশন। কিন্তু কলনবিদ্যায় বহুচলরাশির ফাংশনের আলোচনাও দরকার। পূর্ববর্তী আলোচনায় সবসময় বাস্তব অক্ষরেখায় বিন্দু সমষ্টি নিয়ে (অর্থাৎ একমাত্রিক বিন্দুসমষ্টি নিয়ে) দুইটি সেটের মধ্যে ফাংশন সম্বন্ধ আলোচিত হয়েছে। এই একমাত্রিক (one dimensional) দেশের (space) সেট ছাড়াও আরও অনেক দেশ

আছে, যেমন কার্টেসীয় সমতলের দেশ বা দ্বিমাত্রিক দেশ (two dimensional space) এবং আমাদের জগৎ (অর্থাৎ ত্রিমাত্রিক দেশ) (three dimensional space)। এখন ফাংশনের ধারণা প্রসারিত করে বলতে হলে বলা যায় যে কোন দুইটি সেটের মধ্যে f এমন একটি সম্বন্ধ যার দ্বারা একটি সেটের বস্তুর বদলে অপর সেটের একটিমাত্র বস্তু পাওয়া যায়।



এখানে X বা Y সেট যে কোন দেশে থাকতে পারে অর্থাৎ X বা Y একমাত্রিক বা দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক সেটও হতে পারে।

উচ্চগণিতে n-মাত্রিক দেশও (n-dimensional space) কল্পনা করা হয়। একটি সহজ উদাহরণ হিসাবে বলা যায় কোন গ্যাসের আয়তন উহার চাপ ও তাপাংকের একটি ফাংশন, কারণ $PV = RT$ (R একটি ধ্রুবক) : অতএব দেখা যায় $V = f(P, T)$। তাহলে এখানে স্বাধীন চলরাশি দুইটি যথা P (চাপ) এবং T (তাপাংক)। এখন এই দুইটি স্বাধীন চলরাশির দেশ আমাদের কার্টেসীয় সমতল, এই কার্টেসীয় সমতলে প্রত্যেক (P, T) বিন্দুর সঙ্গত একটি V আছে। এই ধারণা থেকেই আমরা বুঝতে পারি যে

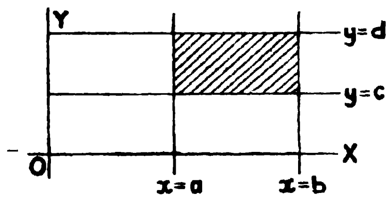


$z = f(x, y)$ ফাংশনের অস্তিত্ব বর্তমান। (x, y) চলরাশিযুগল দ্বিমাত্রিক দেশে আছে এবং f একটি রূপান্তর (mapping) যার দ্বারা দ্বিমাত্রিক দেশের একটি বিন্দুর বদলে একমাত্রিক দেশের একটি মাত্র বিন্দু z পাওয়া যাবে। আবার z যে সবসময় একমাত্রিক দেশে থাকবেই এমন কোন কথা নেই, কারণ z অন্য দেশেও থাকতে পারে, f সেই দুইটি দেশের বিন্দুদের মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপক। অবশ্য যখনই $z = f(x, y)$ লেখা হবে, তখনই (x, y) চলরাশিদ্বয়ের অঞ্চল বা এলাকা সুস্পষ্টভাবে বর্ণিত থাকবে যাতে

z এর মানগুলি কেবলমাত্র সেই অঞ্চলে সঠিকভাবে সংজ্ঞিত হয়। যেমন আমরা বলতে পারি

$$z=f(x, y),$$

যখন $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$;



অর্থাৎ এখানে স্বাধীন দুইটি চলরাশির অঞ্চল একটি আয়তক্ষেত্রে। সাধারণভাবে স্বাধীন দুইটি চলরাশির অঞ্চল যে কোন ক্ষেত্র দ্বারা বর্ণিত হতে পারে, যেমন কোন বৃত্তের অভ্যন্তর বা পরিধি দ্বারা। এইভাবে ফাংশনের ধারণা প্রসারিত করে লেখা যায়

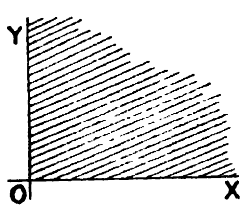
$$u=f(x, y, z)$$

এবং n – মাত্রিক দেশে লেখা হয়

$$y=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

উদাহরণ : 1. $z=xy$

এখানে z চলরাশি x এবং y চলরাশিদ্বয়ের ফাংশন। x এবং y এ কেবল ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা বসালে z একটি আয়তক্ষেত্র বা বর্গক্ষেত্রের কালি নির্দেশ করে। অতএব x ও y এর অঞ্চল সমতলের সসীম প্রথম চতুর্থাংশ (first quadrant)।



উদাহরণ : 2. $u=xyz$

এখানে u চলরাশি x, y, z এই তিনটি চলরাশির ফাংশন। x, y, z এ কেবল ধনাত্মক বাস্তবসংখ্যা বসালে z একটি আয়তঘন বা ঘনকের আয়তন নির্দেশ করে।

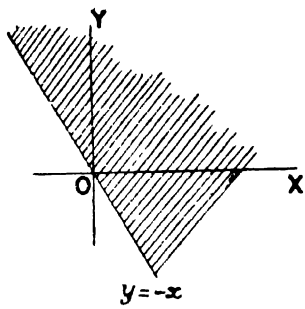
উদাহরণ : 3. $z = 2x - y$

এখানে x ও y এর যে কোন বাস্তব সংখ্যায় z সংজ্ঞিত হয়। অতএব সমস্ত XY-সমতল (সসীম) স্বাধীন চলরাশির অঞ্চল।

উদাহরণ : 4. $z = \log(x + y)$

যেহেতু লগারিথিমের সঠিক বাস্তব মানের জন্য নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হওয়া দরকার $x + y > 0$ বা $y > -x$,

অতএব এখানে স্বাধীন চলরাশির অঞ্চল হবে $y = -x$ সরলরেখার উপরে অর্ধ-সমতল।



উদাহরণ : 5. $z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

এখানে স্বাধীন চলরাশির অঞ্চল সসীম xy সমতল, কেবলমাত্র $x = 0$ এবং $y = 0$ বিন্দুটি বাদ দিতে হবে, কারণ যখন $x = y = 0$, তখন $z = \dfrac{C}{0}$ (অর্থহীন)।

4.09 একচলরাশির ফাংশনের সীমা :

প্রাথমিক মন্তব্যে একচলরাশির ফাংশনের সীমার কথা কিছু বলা হয়েছে। এখন ফাংশনের সীমার কথা বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হবে।

সংজ্ঞা 1 যখন $x \to a - 0$ (a একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা) তখন x যে সব মান ধারণ করে তাদের ক্ষেত্রে $f(x)$ এর মানগুলি কোন সসীম সংখ্যা l_1 এর কাছে পৌঁছায় (অথবা $f(x)$ এর মান সর্বত্র l_1 এর সমান থাকে), তাহলে l_1 কে $f(x)$ এর **বামদিকের সীমা** (left hand limit) বলে এবং লেখা হয় $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x) = l_1$.

উপরোক্ত সংজ্ঞা নিম্নলিখিত আকারে কলন-বিদ্যায় দেওয়া হয় ঃ

সংজ্ঞা 2 একটি ফাংশন $f(x)$ এর বামদিকের সীমা l_1 থাকবে যখন $x \to a-0$, যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা $\in$ (যতই ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয়

$$| l_1 - f(x) | < \in,$$

যখন $a-\delta < x < a$

সংজ্ঞা 3 যখন $x \to a+0$ (a একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা) তখন x যে সব মান ধারণ করে তাদের ক্ষেত্রে $f(x)$ এর মানগুলি কোন সসীম সংখ্যা l_2 এর কাছে পৌঁছায় (অথবা $f(x)$ এর মান সর্বত্র l_3 এর সমান থাকে), তাহলে l_2 কে $f(x)$ এর **ডানদিকের সীমা** (right hand limit) বলে এবং লেখা হয় $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l_2$

উপরোক্ত সংজ্ঞা নিম্নলিখিত আকারে কলন-বিদ্যায় দেওয়া হয় ঃ

সংজ্ঞা 4 একটি ফাংশন $f(x)$ এর ডানদিকের সীমা l_2 থাকবে যখন $x \to a+0$, যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা $\in$ (যতই ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয়

$$| l_2 - f(x) | < \epsilon,$$

যখন $a < x < a+\delta$.

সংজ্ঞা 5 যখন $x \to a$ (অর্থাৎ $x \to a-0$ এবং $x \to a+0$, কিন্তু $x \neq a$) তখন $f(x)$ এর বামদিকের সীমা l_1 যদি $f(x)$ এর ডানদিকের সীমা l_2 এর সমান হয় অর্থাৎ $l_1 = l_2 = l$ (ধর), তবে বলা হয় $f(x)$ এর সীমা l যখন $x \to a$ এবং লেখা হয় $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l.$

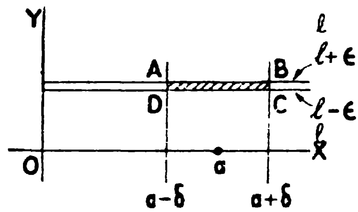
উপরোক্ত সংজ্ঞা কলনবিদ্যায় ϵ এর সাহায্যে নিম্নলিখিত আকারে লেখা হয় :

সংজ্ঞা 6 একটি ফাংশন $f(x)$ এর সীমা l থাকবে যখন $x \to a$, যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ϵ (যতই ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয়

$$| l - f(x) | < \epsilon,$$

যখন $0 < | x-a | < \delta$ অর্থাৎ $x \in N'(a, \delta)$ = মুক্ত অন্তরাল $(a-\delta, a+\delta)$ এর a বাদে সব বাস্তব সংখ্যার অঞ্চল।

উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় যে যখন $x \to a$, তখন $f(x) \to l$, যদি $x \in N'(a, \delta)$ হলেই $f(x) \in N'(l, \epsilon)$ হয়। সংলগ্ন চিত্রে দেখা যায় x এর মান যখনই $x = a - \delta$ এবং $x = a + \delta$ এই লাইন দুইটির মধ্যে থাকবে (অবশ্য $x \neq a$) তখনই $f(x)$ এর মান লেখচিত্রে $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের মধ্যে থাকবে। ϵ এর মান যখন ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হবে তখন $f(x)$ এর মান ঐরূপ একটি ক্ষুদ্রতর আয়তক্ষেত্রের মধ্যে থাকবে এবং ঐ আয়তক্ষেত্রের মধ্যে $y = l$ লাইনটি সবসময় থাকবে আয়তক্ষেত্রটি যতই ক্ষুদ্র হোক না কেন। এরূপ চিত্রের সাহায্যে ফাংশনের সীমার ধারণা বোধ হয় পাঠকগণের কাছে খুব সহজ হয়ে উঠবে।



উদাহরণ 1 মনে কর $f(x) = 2x$; এখন $\lim_{x \to 2} f(x)$ আলোচনা করা হবে।

প্রথম পদ্ধতি : যখন $x \to 2 - 0$, তখন মনে করা যাক x নিম্নলিখিত মানগুলি ধারণ করে

$$1{\cdot}9,\ 1{\cdot}99,\ 1{\cdot}999,\ 1{\cdot}9999,\ \cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

অতএব $f(x)$ এর মানগুলি হবে

$$3{\cdot}8,\ 3{\cdot}98,\ 3{\cdot}998,\ 3{\cdot}9998,\ \cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

স্পষ্টতঃই দেখা যায় $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2 - 0$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \lim_{x \to 2-0} f(x) = 4$$

পুনরায় যখন $x \to 2 + 0$, তখন ধরা যাক x নিম্নলিখিত মানগুলি ধারণ করে :

$$2{\cdot}01,\ 2{\cdot}001,\ 2{\cdot}0001,\ 2{\cdot}00001,\ \cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

অতএব $f(x)$ এর মানগুলি হবে

$$4{\cdot}02,\ 4{\cdot}002,\ 4{\cdot}0002,\ 4{\cdot}00002,\ \cdots \text{ ইত্যাদি।}$$

স্পষ্টতঃই দেখা যায় $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2 + 0$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \lim_{x \to 2+0} f(x) = 4$$

যেহেতু $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 4 = \lim\limits_{x \to 2+0} f(x)$, সংজ্ঞা 5 অনুসারে আমরা পাই $f(x) \to 4$, যখন $x \to 2$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : সংজ্ঞা 6 অনুসারে আমরা প্রমাণ করতে পারি যে

$$\lim_{x \to 2} 2x = 4$$

যদি $\lim\limits_{x \to 2} 2x = 4$ হয়, তবে সংজ্ঞা অনুসারে জানি যে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হবে

$$|2x - 4| < \epsilon, \text{ যখন } 0 < |x - 2| < \delta$$

এখন $|2x - 4| < \epsilon$ হলে আমরা পাই

$$2|x - 2| < \epsilon$$

$$\text{অর্থাৎ } |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}$$

অতএব দেখা যায় প্রতি $\epsilon\ (> 0)$ এর ক্ষেত্রে $\delta = \epsilon/2$ এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা আছে যার দ্বারা $|2x - 4| < \epsilon$, যখন $0 < |x - 2| < \epsilon/2$; প্রতি ϵ এর ক্ষেত্রে δ এর এই অস্তিত্ব প্রমাণ করে $\lim\limits_{x \to 2} 2x = 4$.

মন্তব্য :

(i) প্রথম পদ্ধতিতে $f(x)$ এর সীমা নির্ধারিত হলো।

(ii) দ্বিতীয় পদ্ধতিতে $f(x)$ এর সীমা যে 4 তা প্রমাণিত হলো।

(iii) $\lim\limits_{x \to 2} 2x = 2.2 = 4$; এরূপ লেখা ভ্রান্তিমূলক, কারণ যদি $f(x) = 2x$ হয়, তবে $f(2) = 2.2 = 4$; অতএব সীমা নির্ধারণের ক্ষেত্রে এরূপ লেখাতে ফাংশনের মান নির্ধারিত হলো। ফাংশনের মান $f(2)$ এবং $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ এক্ষেত্রে যদিও সমান, সাধারণভাবে দুইটি সমান নাও হতে পারে। এ প্রসঙ্গে আলোচনা চতুর্থ অধ্যায়ে বিশদ্‌ভাবে করা হবে।

(iv) $\lim\limits_{x \to 2} 2x = \lim\limits_{h \to 0} 2(2+h) = 2(2+0) = 4$; এরূপ লেখাও ভ্রান্তিমূলক, কারণ এখানে বলা উচিত

$$\lim_{h \to 0} 2(2+h) = \lim_{h \to 0} 4 + \lim_{h \to 0} 2h,$$

উহা একটি সীমা নির্ধারণের নিয়ম ; অতএব সংজ্ঞা থেকে সীমা নির্ধারণ করতে বলা হলে এই নিয়মের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে না। উপরন্তু $\lim_{h \to 0} 2h = 2.0$ লেখা যেতে পারে না ; ইহা দেখাতে হলে $\lim_{h \to 0-0} 2h$ এবং $\lim_{h \to 0+0} 2h$ আলোচনা করা উচিত।

উদাহরণ 2 মনে কর $f(x) = [x]$; এখন $\lim_{x \to 1} f(x)$ আলোচনা করা যাক।

4.02 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 11 তে এই ফাংশনটির লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। অনেক সময় লেখচিত্র থেকে সীমা নির্ধারণ করা সহজ হয়। লেখচিত্র থেকে দেখা যায়

যখন $x \to 1-0$, তখন $f(x) = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$$

পুনরায় যখন $x \to 1+0$, তখন $f(x) = 1$

$$\therefore \lim_{x \to 1+0} f(x) = 1$$

যেহেতু $\lim_{x \to 1-0} f(x) \neq \lim_{x \to 1+0} f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ 3 মনে কর $f(x) = |x|$; এখন $\lim_{x \to 0} f(x)$ আলোচনা কর।

4.02 অনুচ্ছেদের উদাহরণ 10 তে এই ফাংশনটির লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যখন $x \to 0-0$, তখন $f(x)$ এর মানগুলি কমতে কমতে শূন্যের কাছে (কখনই শূন্য হয় না) পৌঁছায় ; অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0$$

পুনরায় যখন $x \to 0+0$, তখনও $f(x)$ এর মানগুলি কমতে কমতে শূন্যের কাছে (কখনই শূন্য হয় না, কারণ $x \neq 0$) পৌঁছায়, অতএব আমরা লিখতে পারি

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 0$$

যেহেতু $\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0+0} f(x)$, অতএব $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

4.10 একচলরাশির ফাংশনের অন্যপ্রকার সীমা

4.09 অনুচ্ছেদে একচলরাশির ফাংশনের সীমার আলোচনায় আমরা a একটি

নির্দিষ্ট বাস্তব (সসীম) সংখ্যা ধরেছি এবং $f(x)$ এর সীমা বলতে একটি সসীম সংখ্যা মনে করেছি। কিন্তু যখন $x \to a$ তখন $f(x)$ এর মানগুলি বাড়তে বাড়তে বা কমতে কমতে যদি কোন সসীম সংখ্যার কাছে না পৌঁছায়, তাহলে $f(x)$ এর সীমা প্রকৃতপক্ষে থাকে না অর্থাৎ যদি $f(x)$ মানগুলির সেটের কোন প্রান্তিক বিন্দু না থাকে তখন $f(x)$ এর সীমার কিরূপে আলোচনা করা যাবে? কলন বিদ্যায় বাস্তব সংখ্যার যে অক্ষরেখা তার তো কোন সসীম প্রান্ত পাওয়া যায় না, তবুও কলন বিদ্যার আলোচনার সুবিধার জন্য দুইটি **আদর্শ প্রান্তিক বিন্দু** যথা $-\infty$ এবং $+\infty$ কল্পনা করে নেওয়া হয়। এই কল্পনার ফলে নিম্নলিখিত সীমাগুলির আলোচনা সম্ভবপর হয় :—

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

এখন এই সব সীমার সংজ্ঞা দেবার চেষ্টা করা হবে।

সংজ্ঞা 1 $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ প্রতীক-চিহ্নের অর্থ এইরূপ যে যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা M (যতই বড় হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকে যাতে

$$f(x) > M \text{ হয়,}$$

$$\text{যখনই} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

সংজ্ঞা 2 $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ প্রতীক-চিহ্নের অর্থ এইরূপ যে যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা M (যতই বড় হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকে যাতে

$$f(x) < -M \text{ হয়,}$$

$$\text{যখনই} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

সংজ্ঞা 3 $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ প্রতীক-চিহ্নের অর্থ এইরূপ যে যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ϵ (যত ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা M (যতই বড় হোক না কেন) থাকে যাতে

$$|l - f(x)| < \epsilon \text{ হয়,}$$

$$\text{যখনই } x > M.$$

সংজ্ঞা 4 $\lim_{n \to -\infty} f(x) = l$ প্রতীক-চিহ্নের অর্থ এইরূপ যে, যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ϵ (যতই ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা M (যতই বড় হোক না কেন) থাকে যাতে

$$|l - f(x)| < \epsilon \text{ হয়,}$$

যখনই $x < -M$.

উদাহরণ : সংজ্ঞা অনুসারে প্রমাণ কর

$$\frac{1}{(x-1)^2} \to +\infty, \text{ যখন } x \to 1.$$

সমাধান : উক্তিটি সত্য হবে যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা M (যত বড় হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকে যাতে

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M, \text{ যখন } 0 < |x-1| < \delta.$$

এখন $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ হলে আমরা পাই

$$0 < (x-1)^2 < \frac{1}{M}$$

অর্থাৎ $0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$

অতএব দেখা যায় প্রতি M এর জন্য $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ বিদ্যমান ·তে উপরোক্ত অসমতাটি সিদ্ধ হয়। প্রতি M এর জন্য δ এব অস্তিত্বই প্রমাণ করে

$$\frac{1}{(x-1)^2} \to +\infty, \text{ যখন } x \to 1.$$

4.11 একচলরাশির ফাংশনের সীমার কয়েকটি উপপাদ্য

উপপাদ্য 1 যদি $\lim_{x \to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকে, তবে এই সীমা অদ্বিতীয়।

প্রমাণ : যদি সম্ভব হয়, ধরা যাক

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

এবং $\lim_{x \to a} f(x) = l'$

সীমার সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি যে প্রতি ϵ (>0) এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকবে যাতে

$$|f(x)-l| < \epsilon/2, \quad 0<|x-a|<\delta$$

এবং $$|f(x)-l'| < \epsilon/2, \quad 0<|x-a|<\delta.$$

এখন $|l-l'| = |l-f(x)+f(x)-l'| \leqslant |l-f(x)| + |f(x)-l'|$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \qquad (\because \ |a-b|=|b-a| \text{ এবং } |a+b| \leqslant |a|+|b|)$$

যেহেতু ϵ যত খুশী ছোট ধরা যেতে পারে, সেহেতু

$$l-l'=0 \quad \text{অর্থাৎ} \quad l=l'$$

অতএব $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ অদ্বিতীয়।

উপপাদ্য 2 যদি $f(x)\to l$ যখন $x\to a$ এবং $g(x)\to m$ যখন $x\to a$, তবে

$$f(x)+g(x)\to l+m \text{ যখন } x\to a.$$

প্রমাণ : সীমার সংজ্ঞা অনুসারে

$$|l-f(x)| < \epsilon/2, \quad 0<|x-a|<\delta_1$$

$$|m-g(x)| < \epsilon/2, \ 0<|x-a|<\delta_2$$

এখন δ_1 এবং δ_2 এর চেয়ে ছোট একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ ধরা যাক যাতে

$$|l-f(x)| < \epsilon/2, \ |m-g(x)| < \epsilon/2, \text{ যখন } 0<|x-a|<\delta$$

অতএব আমরা পাই

$$|(l+m)-\{f(x)+g(x)\}| = |\{l-f(x)\}+\{m-g(x)\}|$$

$$\leqslant |l-f(x)| + |m-g(x)| < \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon, \ 0<|x-a|<\delta$$

উপরোক্ত অসমতাটি প্রমাণ করে

$$\lim_{x\to a} \{f(x)+g(x)\}=l+m.$$

উপপাদ্য 3 যদি $f(x)\to l$ যখন $x\to a$ এবং $g(x)\to m$ যখন $x\to a$ তবে

$$f(x)-g(x)\to l-m \text{ যখন } x\to a.$$

সঙ্কেত : লক্ষ্য কর

$$|(l-m)-\{f(x)-g(x)\}| = |\{l-f(x)\}-\{(m-g(x)\}|$$

$$\leqslant |l-f(x)| + |m-g(x)|$$

এখন উপপাদ্য 2 এর মত প্রমাণ কর।

উপপাদ্য 4 যদি $\lim_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x \to a} g(x) = m$ হয় তবে

$$\lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = lm.$$

প্রমাণ : ধরা যাক $f(x) = l + \phi(x)$

এবং $g(x) = m + \psi(x)$,

যেখানে $\lim_{x \to a} \phi(x) = 0 = \lim_{x \to a} \psi(x)$

এখন $f(x) \cdot g(x) = \{l + \phi(x)\}\{m + \psi(x)\}$

$$= lm + m\,\phi(x) + l\,\psi(x) + \phi(x)\,\psi(x)$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = lm + \lim_{x \to a} \phi(x)\,\psi(x)$$

$$(\because \lim_{x \to a} \phi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = 0)$$

এখন যদি প্রমাণ করা যায় $\lim_{x \to a} \phi(x)\,\psi(x) = 0$, তবেই উপাদ্যটি সত্য হবে।

ধরা যাক $\epsilon > 0$; তাহলে

$$|\phi(x)| < \sqrt{\epsilon}\ ;\ 0 < |x - a| < \delta_1,$$

কারণ $\lim_{x \to a} \phi(x) = 0$.

অনুরূপভাবে $|\psi(x)| < \sqrt{\epsilon}$, $0 < |x - a| < \delta_2$.

δ_1 এবং δ_2 এর চেয়ে ছোট ধনাত্মক সংখ্যা δ ধর। তাহলে

$$|\phi(x)\,\psi(x)| = |\phi(x)|\ |\psi(x)| < \sqrt{\epsilon}\sqrt{\epsilon} = \epsilon,\ 0 < |x - a| < \delta$$

অতএব $\lim_{x \to a} \phi(x)\,\psi(x) = 0$.

উপপাদ্য 5 যদি $\lim_{x \to a} f(x) = l$ এবং $\lim_{x \to a} g(x) = m \neq 0$ হয়,

তবে $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l/m$.

প্রমাণ : প্রথমে প্রমাণ করা যাক $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{m}$

মনে কর $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$; অতএব $h(x)\,g(x) = 1$.

উপপাদ্য 4 অনুসারে

$$\lim_{x\to a} \{g(x)\,h(x)\}=1$$

অর্থাৎ $\{\lim_{x\to a} g(x)\}\{\lim_{x\to a} h(x)\}=1$

অর্থাৎ $m\cdot\lim_{x\to a} h(x)=1.$

$\therefore\ \lim_{x\to a} h(x)=\dfrac{1}{m}$ অর্থাৎ $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{m}$

এখন $\lim_{x\to a}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right\}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}$

$$=l\cdot\frac{1}{m}=\frac{l}{m}.$$

নিম্নলিখিত কয়েকটি উপপাদ্য সীমা নির্ধারণের জন্য খুবই প্রয়োজনীয় ; এই উপপাদ্যগুলির প্রমাণ দেওয়া হলো না ; পাঠকগণের প্রমাণ করার অভ্যাস করা ভাল ঃ—

উপপাদ্য 6. যদি $\lim_{x\to a}\phi(x)=l$ এবং $\lim_{y\to b} f(y)=f(b)$ হয়,

তবে $\lim_{x\to a} f(\phi(x))=f(\lim_{x\to a}\phi(x))=f(l).$

উপপাদ্য 7. যদি $\lim_{x\to a} f(x)=l$ এবং $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ হয়, তবে

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$$

উপপাদ্য 8. যদি প্রত্যেক ক্রম $\{x_n\}$ এমন হয় যে $\lim_{n\to\infty} x_n=a$ এবং

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$ হয়, তবে $\lim_{x\to a} f(x)=l.$

মন্তব্য ঃ—উপপাদ্য 8 সীমা নির্ধারণের সময় নিম্নলিখিতভাবে প্রয়োগ করা যেতে পারে ঃ—

যদি এমন দুইটি ক্রম $\{x_n\}$ এবং $\{t_n\}$ ধরা যায় যাতে

$\lim_{n\to\infty} x_n=a=\lim_{n\to\infty} t_n$, কিন্তু যখন $n\to\infty$, $f(x_n)$ এবং $f(t_n)$ দুইটি পৃথক সীমায় পৌঁছায়, তবে $\lim_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকতে পারে না।

দ্রষ্টব্য :—যদি $f_1(x) < f_2(x)$ এবং $\lim_{x\to a} f_1(x)$ ও $\lim_{x\to a} f_2(x)$ বিদ্যমান থাকে, তবে

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \leqslant \lim_{x\to a} f_2(x)$$

আর একটি উপপাদ্যের কথা কেবলমাত্র বিবৃত করে এই অনুচ্ছেদ শেষ করা হবে। উপপাদ্যটি বিখ্যাত গাণিতিক কসির দেওয়া। উপপাদ্যটি সীমা নির্ধারণ ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়।

কসির বিশেষ উপপাদ্য :

যদি প্রত্যেক ধনাত্মক ϵ এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকে যাতে যখনই x_1, x_2 দ্বারা নিম্নলিখিত অসমতাগুলি সিদ্ধ হয়

$$0 < |x_1 - a| \leqslant \delta,\ 0 < |x_2 - a| \leqslant \delta$$

তখনই $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ সিদ্ধ হয়,

তাহলে $x \to a$ হলে $f(x)$ এর সীমা থাকবে এবং বিপরীতক্রমে $f(x)$ এর সীমা থাকলে সর্তটি সিদ্ধ হবে। অতএব কসি সর্তটি আবশ্যক (necessary) এবং পর্য্যাপ্ত (sufficient)।

উদাহরণ 1. মনে কর $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

সহজেই লক্ষ্য করা যায় $f(0)$ অর্থহীন। এখন $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ আলোচনা করা যাক।

কসির বিশেষ উপপাদ্য অনুসারে আমরা জানি যে $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ বিদ্যমান থাকার আবশ্যক এবং পর্য্যাপ্ত সর্ত এই যে প্রাত x_1 ও x_2 দ্বারা যখনই নিম্নলিখিত অসমতা-সিদ্ধ হয়

$$0 < |x_1 - 0| \leqslant \delta \text{ এবং } 0 < |x_2 - 0| \leqslant \delta$$

তখনই $\left| \sin \frac{1}{x_2} - \sin \frac{1}{x_1} \right| < \epsilon$ সিদ্ধ হবে।

এখন ধরা যাক $x_2 = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ এবং $x_1 = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$, n একটি খুব বড় পূর্ণসংখ্যা। এখন যে কোন δ এর জন্য আমরা n কে এমন বড় করে নিতে পারি যাতে

$$0 < |x_1| \leqslant \delta \text{ এবং } 0 < |x_2| \leqslant \delta$$

সিদ্ধ হয়।

এইরূপ δ এর জন্য আমরা পাই

$$\left|\sin\frac{1}{x_2}-\sin\frac{1}{x_1}\right|=\left|\sin(4n+1)\frac{\pi}{2}-\sin\frac{(4n-1)\pi}{2}\right|$$

$$=|1-(-1)|=2 \nless \epsilon$$

অর্থাৎ কোন δ এর জন্যই আমরা ϵ পাই না যাতে

$$\left|\sin\frac{1}{x_2}-\sin\frac{1}{x_1}\right|<\epsilon$$

অতএব কসির আবশ্যক এবং পর্য্যাপ্ত সর্ত অনুসারে আমরা দেখি যে

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ 2. মনে কর $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

সহজেই লক্ষ্য করা যায় $f(0)=\frac{0}{0}$ (অর্থহীন)।

কিন্তু এখানে দেখানো হবে $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ত্রিকোণমিতি থেকে আমরা জানি

$$\sin x<x<\tan x,\ \text{যখন}\ 0<x<\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad (\because\ \sin x>0)$$

এখন $\lim\limits_{x\to 0+} 1\leqslant\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}\leqslant\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\cos x}$

কিন্তু $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\cos x}=1$

$$\therefore\quad 1\leqslant\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}\leqslant 1$$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}=1$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$

এখানে লক্ষ্য করা যেতে পারে $\frac{\sin x}{x}$ একটি যুগ্ম ফাংসন, কারণ যদি

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\ \text{হয়, তবে}\ f(-x)=f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0+} \frac{\sin y}{y} \quad (y = -x \text{ বসাইয়া})$$
$$= 1$$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin x}{x}$, অতএব আমরা পাই

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

উদাহরণ 3. প্রমাণ কর—

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

সমাধান: যেহেতু x একটি বাস্তব সংখ্যা, সেহেতু ধরা যেতে পারে $n =$ সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যা যা $\leqslant x$

$$\therefore \quad n \leqslant x \leqslant n+1$$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{n}$

অর্থাৎ $\quad 1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{x} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

তৃতীয় অধ্যায়ের 3.06 অনুচ্ছেদে প্রমাণ করা হয়েছে যে

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

এখন বামপক্ষ $= \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Big/ \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left\{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right\} \Big/ \left\{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

পুনরায় ডানপক্ষ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$$

কিন্তু $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\therefore \quad e\leqslant\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leqslant e$$

অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

মন্তব্য : উপরোক্ত উদাহরণ নিম্নলিখিতভাবে লেখা যেতে পারে

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

কারণ $\frac{1}{x}\to\infty$, যখন $x\to 0+$.

আবার উদাহরণ 3 এর সাহায্যে দেখানো যেতে পারে

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

কারণ যদি $x=-y$ হয় তবে

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{y}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e$$

তাহলে $\lim\limits_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

অতএব $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

উদাহরণ 4. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

সমাধান : আমরা জানি $|\sin x| \leqslant 1$

$$\therefore \left|\frac{\sin x}{x}\right| = |\sin x| \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \lim_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

উদাহরণ 5. দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

সমাধান : সীমাব সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি যে প্রতি $\epsilon > 0$ এর ক্ষেত্রে একটি $\delta > 0$ আছে যাতে

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon, \quad \text{যখন } 0 < |x - 0| < \delta.$$

মনে কর $0 < |x| < \delta$; তাহলে

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$$

$$\text{যেহেতু } \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant 1 < 1,$$

অতএব এখানে $\epsilon = \delta$; প্রতি δ এর জন্য ϵ এর অস্তিত্বই প্রমাণ করে

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

অন্য পদ্ধতি : যেহেতু $\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant 1$, অতএব আমরা পাই

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

সুতরাং $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$

4.12 বহুচলরাশির ফাংশনের সীমা :

বহুচলরাশির ফাংশনের ধারণা সম্বন্ধে 4·08 অনুচ্ছেদে সংক্ষেপে বলা হয়েছে। এখানে আমরা বহুচলরাশির ফাংশনের সীমার কথাও সংক্ষেপে আলোচনা করব। আলোচনা সহজ হবে যদি আমরা দুইচলরাশি ফাংশন নিয়ে আলোচনা করি। এখন দুই চলরাশির একটি ফাংশন মনে কর $f(x, y)$; এখন (x, y) চলরাশিযুগল দ্বিমাত্রিক দেশে অবস্থিত, তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি দ্বিমাত্রিক দেশে একটি অঞ্চলে সংজ্ঞিত। মনে কর $(x, y)\to(a, b)$ অর্থাৎ (x, y) চলরাশিযুগল দ্বিমাত্রিক দেশে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর (যথা (a, b)) কাছে পৌঁছায় ; একমাত্রিক দেশে যেমন $x\to a$ বললে চলরাশি x এর 'a' কাছে পৌঁছাতে হলে দুইটিমাত্র দিক (যথা বাম ও ডান দিক) থাকে, তেমন $(x, y)\to(a, b)$ বললে চলরাশিযুগল (x, y) নির্দিষ্ট বিন্দু (a, b) এর কাছে পৌঁছাতে হলে কয়টি দিক আছে তা বিশদভাবে আলোচনা করে নিতে হবে। দ্বিমাত্রিক দেশে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর কাছে পৌঁছাতে হলে অনন্ত দিক আছে অর্থাৎ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুর কাছে পৌঁছাতে হলে দ্বিমাত্রিক দেশে যে কোন সরলরেখা বা যে কোন বক্ররেখা (অবশ্য ঐ রেখা নির্দিষ্ট বিন্দু অতিক্রম করবে) দিয়েই পৌঁছাতে হবে। তাই $x\to a$ প্রতীক চিহ্নটি বুঝতে হলে যেমন লেখা হয় $x\to a+$ এবং $x\to a-$, $(x, y)\to(a, b)$ প্রতীকচিহ্নটি বুঝতে হলে এইরূপ কোন সসীমসংখ্যক প্রতীকচিহ্ন সমূহের সাহায্যে লেখা যায় না।

সুতরাং চলরাশিযুগল (x, y) যে কোন রেখার মধ্য দিয়ে যখন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (a, b) এর কাছে পৌঁছায়, তখন যদি $f(x, y)$ এর মানগুলি একটি বাস্তব সংখ্যা l এর কাছে পৌঁছায় (বা $f(x)$ মান সর্বত্র l এর সমান থাকে) তবে আমরা বলি $f(x, y)$ এর সীমা l যখন $(x, y)\to(a, b)$; প্রতীকচিহ্ন হিসাবে লেখা হয়—

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = l.$$

কখনও কখনও উপরোক্ত প্রতীকচিহ্ন নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = l.$$

উপরোক্ত প্রতীকচিহ্নের সহিত নিম্নের প্রতীকচিহ্ন দুইটি তুলনামূলকভাবে লক্ষ্য করা উচিত :

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$$

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

প্রথম প্রতীকচিহ্নটিতে পৃথকভাবে প্রথমে $x \to a$ এবং পরে $y \to b$; দ্বিতীয় প্রতীকচিহ্নটিতে পৃথকভাবে প্রথমে $y \to b$ এবং পরে $x \to a$; এই দুইটি সীমাকে **পুনরাবৃত্ত** (Repeated বা iterated) **সীমা** বলে। আর $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x)$ কে **দ্বিসীমা** (Double limit) বলে।

সংজ্ঞা : প্রতীকচিহ্ন $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = l$ বা $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = l$ দ্বারা আমরা বুঝি যে প্রতি ধনাত্মক সংখ্যা ϵ (যতই ছোট হোক না কেন) এর ক্ষেত্রে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ থাকবে যাতে

$$| l - f(x, y) | < \epsilon,$$

যখনই $0 < | x - a | < \delta$ এবং $0 < | y - b | < \delta$.

দ্বিসীমা এবং পুনরাবৃত্ত সীমার সম্পর্ক :

যখন $(x, y) \to (a, b)$, তখন যদি $f(x, y)$ এর দ্বি-সীমা বিদ্যমান থাকে, তবে $f(x, y)$ এর দুইটি পুনরাবৃত্ত সীমাও বিদ্যমান থাকবে এবং তিনটি সীমা সমান হবে।

কিন্তু যদি দুইটি পুনরাবৃত্ত সীমা অসমান হয়, তবে দ্বি-সীমা থাকতে পারে না।

পুনরায় যদি দুইটি পুনরাবৃত্ত সীমা সমান হয়, তবে দ্বি-সীমা বিদ্যমান থাকতে পারে বা নাও পারে।

উদাহরণ। মনে কর $f(x, y) = \dfrac{y}{x + y}$

এখানে $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \dfrac{y}{x + y} = \lim_{y \to 0} \left(\dfrac{y}{y}\right) = \lim_{y \to 0} 1 = 1.$

আবার $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \dfrac{y}{x + y} = \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{0}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$

যেহেতু $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{y}{x+y}\neq\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y}{x+y}$,

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y}{x+y}$ বিদ্যমান থাকতে পারে না।

প্রকৃতপক্ষে আমরা প্রমাণ করতে পারি দ্বি-সীমা বিদ্যমান নয়। মনে কর $(x, y)\to(0, 0)$, যখন (x, y) নিম্নলিখিত সরলরেখার উপর আছে

$y=mx$, m একটি অবাধ ধ্রুবক।

এখন $\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ y=mx}}\frac{y}{x+y}=\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{mx}{(m+1)x}=\frac{m}{m+1}$;

কিন্তু $\frac{m}{m+1}$ সংখ্যাটি m এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন মান গ্রহণ করে; অতএব কেবলমাত্র $y=mx$ পথের উপর দিয়ে যখন $(x, y)\to(0, 0)$ হয়, তখন $f(x, y)$ এর মান কোন একটি সংখ্যার কাছে পৌঁছায় না।

অতএব $\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{y}{x+y}$ বিদ্যমান নয়।

উদাহরণ 2 মনে কর $f(x, y)=\frac{x^2}{x^2+y^2-x}$, $x^2+y^2\neq 0$

$=0$, $x^2+y^2=0$

এখানে $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=0.$

$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2-x}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$

উপরোক্ত সীমা দুইটি সমান হওয়ায় আমরা দ্বিসীমা সম্বন্ধে কিছু বলতে পারি না। দ্বি-সীমা আলোচনা করার জন্যই আমরা নিম্নলিখিত পথগুলির সাহায্য লই

$y^2-x=mx^2$;

সহজেই দেখা যায় এই পথে $(x, y)\to(0, 0)$

$\therefore\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y-x=mx^2}}f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+m)x^2}=\frac{1}{m+1}$

যেহেতু m এর বিভিন্ন মানের জন্য $\frac{1}{m+1}$ বিভিন্ন ; সেহেতু

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ বিদ্যমান নয়।

4.13 ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞা।

সংজ্ঞা 1 (সীমার মাধ্যমে অবিচ্ছিন্নতার ধারণা)

$f(x)$ ফাংশনকে $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি

(i) $\lim_{x\to a} f(x)$ সসীম হয়,

(ii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ হয়।

উপরোক্ত সংজ্ঞার কোন একটি সর্ত যদি সিদ্ধ না হয় তবে $f(x)$ ফাংশনকে $x=a$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন বা অসন্তত (discontinuous) বলা হয়।

উপরোক্ত সংজ্ঞার দ্বিতীয় সর্ত থেকে দেখা যায় যে যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে নিম্নলিখিত সীমার প্রতীক এবং ফাংসন প্রতীকের বিনিময় হতে পারে—

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)$$

সংজ্ঞা 2 (কসির সংজ্ঞা)

সংজ্ঞা 1 এ অবিচ্ছিন্নতা সীমার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে। বিখ্যাত গাণিতিক কসি অবিচ্ছিন্নতাকে সীমার সংজ্ঞার মাধ্যমে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করেছেন :

$f(x)$ ফাংশনকে $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এর জন্য (ϵ যত ছোট হোক না কেন) একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয় :

$$|f(x)-f(a)| < \epsilon,$$

যখন $0 \leqslant |x-a| < \delta.$

মন্তব্য : প্রাথমিক মন্তব্যে বলা হয়েছে যে সংজ্ঞা 1 এর দ্বিতীয় সর্তটি নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)]=0$$

উদাহরণ 1 মনে কর $f(x)=x^2$ এবং $x=a$ যে কোন একটি বিন্দু।

এখন $f(a)=a^2$ এবং $f(a+h)=(a+h)^2$

$$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=2ah+h^2$$

সুতরাং $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]$

$$=\lim_{h\to 0}[2ah+h^2]$$

$$=2a\lim_{h\to 0}h+\lim_{h\to 0}h^2$$

$$=0$$

অতএব $f(x)=x^2$ ফাংশনটি যে কোন বিন্দু $x=a$ তে অবিচ্ছিন্ন।

অন্য পদ্ধতি : এখানে $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x^2=a^2$; সীমাটি বিদ্যমান এবং সসীম যখন a একটি সসীম সংখ্যা। পুনরায় $f(a)=a^2$

যেহেতু $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$, সেহেতু $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন (সংজ্ঞা 1 অনুযায়ী)

অন্য পদ্ধতি : সংজ্ঞা 2 অনুসারে $f(x)=x^2$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হতে হলে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হতে হবে

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon,$$

যখন $0\leqslant|x-a|<\delta$

অর্থাৎ $|x^2-a^2|<\epsilon$, যখন $0\leqslant|x-a|<\delta$.

এখন ধরা যাক $\delta\leqslant 1$, তাহলে $0\leqslant|x-a|<1$ অর্থাৎ

$a-1<x<a+1$; অতএব $x+a<2a+1$

$$\therefore\quad |x^2-a^2|=|x+a|\ |x-a|<(2a+1)\delta$$

যদি $\delta=\dfrac{\epsilon}{(2a+1)}$ বা 1 (যেটি ক্ষুদ্রতর) ধরা হয়, তাহলে পাওয়া যায়

$$|x^2-a^2|<\epsilon \text{ যখন } 0\leqslant|x+a|<\delta.$$

প্রতি ϵ এর জন্য δ এর অস্তিত্ব অথবা বিপরীতভাবে প্রতি δ এর জন্য ϵ এর অস্তিত্বই প্রমাণ করে $f(x)$ ফাংশনের $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা।

উদাহরণ 2 যদি $f(x)$ ফাংশনটি নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞিত হয়

$$f(x)=0, \text{ যখন } x=0$$
$$=x, \text{ যখন } x>0$$
$$=-x, \text{ যখন } x<0$$

তবে $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

সমাধান :

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x=0-} -x=0$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$$

আবার $f(0)=0$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0), f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত।

উদাহরণ 3. নিম্নলিখিত ফাংশনটি $x=3$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা পরীক্ষা কর :—

$$f(x)=3-2x, \text{ যখন } x<3 \text{ এবং } x>3$$
$$=2-3x, \text{ যখন } x=3.$$

সমাধান :— $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-} (3-2x)=-3$

$$\lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+} (3-2x)=-3$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=-3.$$

কিন্তু $f(3)=2-3x\Big|_{x=3}=2-3.3=-7$

যেহেতু $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\neq f(3), f(x)$ ফাংশনটি $x=3$ বিন্দুতে অসন্তত।

উদাহরণ 4. দেখাও যে $f(x)=\sin x$ ফাংশনটি যে কোন বাস্তব x তে সন্তত।

সমাধান ঃ—মনে কর $x=a,\ 0 \leqslant a \leqslant \pi/2$.

$$\text{এখন}\ |\sin x - \sin a| = \left|2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$=2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

আমরা জানি

$$\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| < 1$$

$$\text{এবং}\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\therefore\quad |\sin x+\sin a| < 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|$$

যদি $|x-a| < \epsilon$ হয়, তাহলে $|\sin x - \sin a| < \epsilon$; $\epsilon-\delta$ সংজ্ঞানুসারে যেহেতু $\delta=\epsilon$, $\sin x$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে সন্তত। এখন যদি $a \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, তাহলে $\sin x$ এর পর্যাবৃত্ত (periodic) ধর্মের সাহায্যে দেখান যেতে পারে যে $\sin x$ এই সব x এর মানের জন্য সন্তত।

উদাহরণ 5 $f(x)=e^x$ যে কোন বাস্তব বিন্দুতে সন্তত,

অতএব লক্ষ্য করা যায়

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a \quad \left[\because \lim_{x\to a} f(x)=f(a)\right]$$

উদাহরণ 6 লক্ষ্য করা যায়

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

এখন আমরা জানি $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\log x$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন যখন $x>0$; তাহলে যখন $x=e$ তখন ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং আমরা পাই

$$\lim_{x\to 0}\log\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log e = 1.$$

4.14 কোন অন্তরালে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা

যদি কোন মুক্ত অন্তরালে (a, b) এর প্রত্যেক বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে বলা হয় $f(x)$ ফাংশনটি (a, b) অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন।

যদি $f(x)$ ফাংশন $x=a$ বিন্দুতে সংজ্ঞিত হয় এবং $\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$ হয়, তাহলে বলা হয় $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ **বিন্দুর ডানদিকে সন্তত।**

আবার যদি $\lim_{x \to b-} f(x)=f(b)$ হয়, তাহলে বলা হয় $f(x)$ ফাংশনটি $x=b$ **বিন্দুর বামদিকে সন্তত।**

পুনরায় যদি $f(x)$ ফাংশনটি (a, b) মুক্ত অন্তরালের প্রত্যেকটি বিন্দুতে সন্তত হয় এবং যদি অন্তরালের কোন দুই প্রান্ত বিন্দুতে অর্থাৎ $x=a$ এবং $x=b$ এর যথাক্রমে ডানদিকে এবং বামদিকে সন্তত হয়, তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত।

উদাহরণ। $f(x)=x^2$ ফাংশনটি যে কোন বদ্ধ অন্তরালে $[a, b]$ সন্তত।

4.15 ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলির শ্রেণীভাগ

ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার নিম্নলিখিত যে কোন একটি সর্ত

(i) $\lim_{x \to a-} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a+} f(x)$ এর সসীম মান বিদ্যমান

(ii) $\lim_{x \to a-} f(x)=f(a)=\lim_{x \to a+} f(x)$

অথবা যে কোন সর্তের কোন অংশ যদি সিদ্ধ না হয়, তাহলে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন বা অসন্তত বলা হয় এবং $x=a$ বিন্দু $f(x)$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার একটি বিন্দু।

ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলির নিম্নলিখিতভাবে শ্রেণীভাগ করা হয় ঃ—

(A) যদি $\lim_{x \to a-} f(x)$ এবং $\lim_{x \to a+} f(x)$ সসীমভাবে বিদ্যমান থাকে, কিন্তু সীমা দুটির মান যদি ভিন্ন হয়, তাহলে a বিন্দুকে $f(x)$ ফাংশনের **বিচ্ছিন্নতার প্রথম শ্রেণীর বিন্দু** বলা হয়।

উদাহরণ। মনে কর

$$f(x) = 1, \text{ যখন } x > 0$$
$$= -1, \text{ যখন } x < 0$$
$$= 0, \text{ যখন } x = 0$$

এখানে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$

অতএব $x = 0$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার প্রথম শ্রেণীর বিন্দু।

(B) যদি $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq f(a)$. তাহলে $x = a$ বিন্দুকে $f(x)$ ফাংশনের **অপসারণযোগ্য** (removable) বিচ্ছিন্নতার বিন্দু বলা হয়, কারণ এই ধরণের বিচ্ছিন্নতা সহজেই দূর করা যায় যদি $f(a)$ মানকে সীমার সমান করে নেওয়া হয়।

উদাহরণ। মনে কর

$$f(x) = 1, \text{ যখন } x \neq 0$$
$$= 0, \text{ যখন } x = 0$$

এখানে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, কিন্তু $f(0) = 0$

অতএব $x = 0$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার অপসারণযোগ্য বিন্দু। যদি $f(0) = 1$ ধরা হয়, তাহলেই $f(x)$ ফাংশনের $x = 0$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্নতা দূরীভূত হয়।

(C) যদি $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ এর কোনটি সসীমভাবে বিদ্যমান না থাকে, তাহলে $x = a$ বিন্দুকে $f(x)$ ফাংশনের **বিচ্ছিন্নতার দ্বিতীয় শ্রেণীর বিন্দু** বলা হয়।

উদাহরণ: মনে কর $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$, যখন $x \neq 0$

$$= 0, \quad \text{যখন } x = 0$$

এখানে $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ বিদ্যমান নয় এবং $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ বিদমান নয়।

অতএব $x = 0$ বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার দ্বিতীয় শ্রেণীর বিন্দু।

4.16 অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্ম

অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্মের কিছু কথা এই অনুচ্ছেদে বলা হবে। তবে যে ধর্মগুলির প্রমাণ দেওয়া হবে, আর যেগুলির আলোচনা বর্তমান পুস্তকের গণ্ডীর মধ্যে আসবে না সেগুলি উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হবে।

উপপাদ্য 1. যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $g(x)$, $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $f(x)+g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ: যেহেতু $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, আমরা পাই

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

আবার $g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলে আমরা পাই

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

এখন সীমার ধর্মের সাহায্যে আমরা দেখি

$$\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a)+g(a)$$

অতএব সংজ্ঞানুসারে $f(x)+g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

মন্তব্য: (1) যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $g(x)$ একই অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $f(x)+g(x)$ ফাংশনটি সেই অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হবে।

(2) যেহেতু উপপাদ্য 1 এর প্রমাণ নির্ভর করছে সীমার ধর্মের উপর, সেহেতু অনুরূপ উপপাদ্যগুলির প্রমাণ বিশদভাবে দেবার প্রয়োজন নাই।

উপপাদ্য 2. যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $cf(x)$, যেখানে c একটি ধ্রুবক, ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

প্রমাণ-সংকেত: $\lim_{x \to a} (cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x) = cf(a)$

উদাহরণ: যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $2f(x)+3g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উপপাদ্য 3. যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $g(x)$, $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $f(x)-g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ-সংকেত : $f(x)-g(x)=f(x)+(-1)\,g(x)$

এখন উপপাদ্য 1 এবং উপপাদ্য 2 এর সাহায্যে উপপাদ্য 3 প্রমাণ করা যেতে পারে।

উপপাদ্য 4. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $f(x)\,g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

উপপাদ্য 5. যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $f(x)/g(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে যদি $g(a)\neq 0$ হয়।

উপপাদ্য 6. যদি $y=f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $z=g(y)$ ফাংশনটি $y=b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে $b=f(a)$ হলে $z=g\{f(x)\}$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ : মনে কর $h(x)=g\{f(x)\}$.

যেহেতু $f(x)$ এবং $g(y)$ যথাক্রমে $x=a$ এবং $y=b$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন,

সেহেতু আমরা পাই

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x)=f(a)$$

এবং $$\lim_{x\to b} g(y)=g(\lim_{y\to b} y)=g(b)=g\{f(a)\}=h(a)$$

অতএব $$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g\{f(x)\}$$

$$=g\{\lim_{x\to a} f(x)\}$$

$$=g\{f(a)\}=h(a)$$

$\therefore\;\; h(x)=g\{f(x)\}$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ : $y=x^2$ এবং $z=\sin y$ ফাংশন দুইটি যে কোন অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন বলে $y=\sin x^2$ ফাংশনটি যে কোন অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন।

উপপাদ্য 7. যদি $f(x)$ ফাংশন $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $f(a)$ ও $f(b)$ এর মানের চিহ্ন বিপরীত হয়, তবে অন্ততপক্ষে একটি বিন্দু ξ এমন থাকবে যাতে $f(\xi)=0$ হবে, যেখানে $a<\xi<b$.

উদাহরণ : মনে কর $f(x)=x^3-2$

এখন $f(1)=-1$ এবং $f(2)=6$

অতএব $f(1)$ এবং $f(2)$ এর মানের চিহ্ন বিপরীত। $f(x)$ ফাংশনটি $[1, 2]$ এই বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন। তাহলে এই অন্তরালের মধ্যে একটি বিন্দু ξ এমন থাকবে যাতে $f(\xi)=0$, যেখানে $1<\xi<2$.

প্রকৃতপক্ষে $x^3-2=0$ সমাধান করে পাই $x=\sqrt[3]{2}$

লক্ষ্য কর $1<\sqrt[3]{2}<2$

$\therefore\ \xi=\sqrt[3]{2}$.

উপপাদ্য 8. যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং N এমন একটি সংখ্যা যাতে $f(a)<N<f(b)$ হয়, তাহলে অন্ততপক্ষে একটি বিন্দু ξ $(a<\xi<b)$ এমন থাকবে যাতে $f(\xi)=N$ হবে।

উপপাদ্য 9. যদি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে এই অন্তরালে $f(x)$ ফাংশনের মানগুলি প্রান্তবদ্ধ অর্থাৎ $f(x)$ এর অন্ততপক্ষে একটি লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্ত এবং একটি গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত থাকবে।

মন্তব্য : এই উপপাদ্যের সত্যতা পরের অধ্যায়ে প্রয়োগের ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়। যখন $f(x)$ একটি বদ্ধ অন্তরালে $[a, b]$ অবিচ্ছিন্ন হবে তখন $f(x)$ এর মানগুলি প্রান্তবদ্ধ হবে এবং $f(x)$ অন্ততপক্ষে একবার লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্তের এবং গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্তের মান ধারণ করবে অর্থাৎ ξ এবং η দুইটি সংখ্যা এমন থাকবে ($\xi, \eta \in [a, b]$) যাতে $f(\xi)=M$ এবং $f(\eta)=m$, যেখানে M এবং m যথাক্রমে $f(x)$ এর $[a, b]$ অন্তরালে লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্ত বিন্দু এবং গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত বিন্দু।

অধিকন্তু যদি $m<\alpha<M$ হয় তবে এমন একটি বিন্দু μ ($\mu \in [a, b]$) থাকবে যাতে $f(\mu)=\alpha$ হবে।

উপপাদ্য 10. যদি $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং $f(a)>0$ [অথবা $f(a)<0$] হয়, তবে a বিন্দুর একটি অঞ্চল এমন থাকবে যেখানে $f(x)>0$ [অথবা $f(x)<0$] হবে

4.17 বিলোম ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা

যদি $y=f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং ঐ অন্তরালে যথাযথ একদিষ্ট আরোহী (বা অবরোহী) হয়, তবে y এর মানগুলি একটি বদ্ধ

অন্তরাল $[A, B]$ সৃষ্টি করে এবং $[A, B]$ অন্তরালে কেবলমাত্র একটি ফাংশন $x=\phi(y)$ এর অস্তিত্ব বজায় থাকে। $f(x)$ এবং $\phi(y)$ কে পরস্পর **বিলোম ফাংশন** (Inverse . function) বলে। $\phi(y)$ ফাংশনটি $[A, B]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ একদিস্ট আরোহী (বা অবরোহী) হবে।

মনে কর $y=f(x)=\sin x$; এই ফাংশনটি $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ একদিস্ট আরোহী। $f(x)$ এর মানগুলি $[-1, 1]$ এই বদ্ধ অন্তরাল সৃষ্টি করে। অতএব $f(x)$ এর বিলোম ফাংশন $x=\sin^{-1}y$, $[-1, 1]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ একদিস্ট আরোহী।

মনে কর $y=x^3$; এই ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ একদিস্ট আরোহী। এখানে বিলোম ফাংশন $x=\sqrt[3]{y}$.

মনে কর $y=e^x$, এই ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ একদিস্ট আরোহী। এখানে বিলোম ফাংশন $x=\log_e y$.

কিন্তু $y=x^2$ ফাংশনটি $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন, অথচ এই অন্তরালে একদিস্ট আরোহী বা অবরোহী নয় বলে ফাংশনটির বিলোম ফাংশনের অস্তিত্ব নেই। যদি $[0, \infty)$ অন্তরালে ফাংশনটি আলোচনা করা হয় তাহলে এই অন্তরালে একদিস্ট আরোহী বলে এখন এর বিলোম ফাংশন $x=\sqrt{y}$। আবার $(-\infty, 0)$ অন্তরালে ফাংশনটি একদিস্ট অবরোহী বলে এর বিলোম ফাংসন $x=-\sqrt{y}$

4.18 বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা

বহুচলবিশিস্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করতে হলে দুই চলবিশিস্ট ফাংশন ধরলে যথেস্ট হবে, কারণ দুই চলবিশিস্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা বোধগম্য হলে সহজেই তিন বা ততোধিক চলবিশিস্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা করা যেতে পারে।

মনে কর $z=f(x, y)$ ফাংশনটি xy-সমতলের কোন এক অঞ্চলে (G) তে সংজ্ঞিত। মনে কর $(a, b)\in G$.

এখন যদি $$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)=f(a, b) \qquad \cdots \quad (1)$$

হয়, তাহলে $f(x, y)$ ফাংশনটিকে (a, b) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয়। যদি $f(x, y)$ ফাংশন G অঞ্চলের প্রত্যেক বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে $f(x, y)$ ফাংশন G অঞ্চলে অবিচ্ছিন্ন।

(1) থেকে আমরা পাই

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} [f(a+h, b+k)-f(a+b)]=0$$

(2) অর্থাৎ $\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \triangle z=0$, যেখানে $\triangle z=f(a+h, b+k)-f(a, b)$

উদাহরণ 1. $z=x^2+y^2$ ফাংশনটি x ও y এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য অবিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ ফাংশনটি xy-সমতলে সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন। প্রকৃতপক্ষে আমরা লক্ষ্য করি

$$\triangle z=[(x+h)^2+(y+k)^2-(x^2+y^2)]$$
$$=2xh+2yk+h^2+k^2$$
$$\therefore \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \triangle z=0$$

উদাহরণ 2. $z=\dfrac{1}{x-y}$ ফাংশনটি $x-y=0$ এই সরলরেখার প্রত্যেকটি বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। এখানে ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা একটি বিন্দুতে সীমাবদ্ধ নয়, পুরো সরলরেখাই ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার সরলরেখা।

উদাহরণ 3. $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার একটি মাত্র বিন্দু $x=0$, $y=0$ অর্থাৎ $x^2+y^2=0$

এখানে $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2m}{1+m^2}$

উপরোক্ত সীমা থেকে দেখা যায় (0, 0) বিন্দু দিয়ে যে কোন সরলরেখার উপর দিয়ে যখন $(x, y)\to(0, 0)$ হয়, তখন z এর মান ধ্রুবক, কিন্তু এই মান সরলরেখার নতি m এর উপর নির্ভরশীল। তাহলে বিভিন্ন নতির জন্য $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ বিভিন্ন।

অতএব $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ বিদ্যমান থাকে না। সেহেতু $f(0, 0)$ এর মান কোন

কিছুই ধরা যেতে পারে না যাতে $f(0, 0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ হয়।

অর্থাৎ $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ ফাংশনটি (0, 0) বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। (0, 0) বিন্দু ছাড়া অন্য বিন্দুতে $f(x, y)$ অবিচ্ছিন্ন।

এক চলবিশিষ্ট ফাংশনের মত দুই চলবিশিষ্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার ধর্ম আলোচনা করা যেতে পারে। আমরা আলোচনাকে বর্তমান পাঠ্যপুস্তকে আর দীর্ঘ না করে এখানেই শেষ করতে চাই।

বিবিধ অনুশীলনী 4

ফাংশনের অনুশীলনী ঃ—

1. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর ঃ—

   (i) $y=x,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

   (ii) $y=|x|,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

   (iii) $y=\dfrac{x}{|x|},\ -2 \leqslant x \leqslant 2$

   (iv) $y=x+|x|,\ -1 \leqslant x \leqslant 2$

   (v) $y=x|x|,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$

2. (a) যদি $f(x)=x^2$ হয়, তবে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মূল্যায়ণ কর ঃ

   (i) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ [উত্তর $2x+h$]

   (ii) $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$ [উত্তর $4x$]

   (b) যদি $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=1/\{(1-x)(1-x-h)\}.$$

3. যদি $f(x)=\log_e x$ এবং $F(x)=e^x$ হয়, তবে দেখাও যে

$$F(f(x)=f(F(x))$$

4. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির x এর অঞ্চল নির্ণয় কর :—

(i) $y = \dfrac{1}{x-2}$

(ii) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

(iii) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

5. যদি $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \; x > 0$

$\quad = 0, \qquad x = 0$

তবে দেখাও যে $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant x$ এবং এই ফাংশনের লেখচিত্র $y = x$ এবং $y = -x$ এই দুইটি সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। লক্ষ্য কর $f(x) = 0$, যখন $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \cdots$ এবং $f(0) = 0$. লেখচিত্র অঙ্কন করে দেখাও যে $x = 0$ এবং $x = \frac{1}{\pi}$ এর মধ্যে লেখচিত্র বহুবার $y = x$ এবং $y = -x$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে ওঠানামা করছে।

6. $\tan^{-1} x$ কি এককমান বিশিষ্ট ফাংশন ? যদি না হয়, তবে কিরূপে এই ফাংশনকে এককমান বিশিষ্ট করবে ?

[লক্ষ্য কর : $\tan^{-1} x = n\pi + \tan^{-1} x$; $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ এইরূপ ধরলে এককমান বিশিষ্ট হবে।]

7. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ $(x \neq -1)$ একটি মূলদ এবং 'ইররাসানাল' (irrational) ফাংশন।

[**সঙ্কেত :** ধর $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$, তাহলে $(x+1)^2 y^2 - 2(x+1)y + 1 - x = 0$; শেষের সমীকরণটির y এর সহগগুলি যেহেতু x এর বহুপদ রাশি, $f(x)$ একটি মূলদ ফাংশন। পুনরায় $f(x)$ দুইটি বহুপদ রাশির অনুপাত নয় বলে ইহা একটি 'ইররাসানাল' (irrational) ফাংশন।]

8. যদি $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$ হয়, তবে প্রমাণ কর—

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$$

9. যদি $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ এবং $g(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$ হয়, তবে দেখাও যে

(i) $f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

(ii) $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

10. দেখাও যে $f(x)=\frac{x-1}{x}$ $(x\neq 0)$ একটি একদিষ্ট আরোহী ফাংশন যখন $x>0$.

11. যদি $f(x)=\tan x$ হয়, তবে প্রমাণ কর $f(2x)=\frac{2f(x)}{1-[f(x)]^2}$

12. যদি $f(x, y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ $(x\neq 0, y\neq 0)$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$f(1, y/x)=f(x, y)$$

13. যদি $f(x+y, x-y)=xy+y^2$ হয়, তবে $f(x, y)$ এর মূল্যায়ণ কর। [উত্তর $f(x, y)=(x^2-xy)/2$]

14. যদি $z=x^2y$ হয়, তবে এই ফাংশনের অণুভূমিক রেখাগুলি (level lines) নির্ণয় কর।

[**সঙ্কেত :** যদি $z=f(x, y)$ হয়, $f(x, y)=$ ধ্রুবক—সমীকরণটি অনুভূমিক রেখাগুলির সমীকরণ দেয়।
এখানে $x^2y=c$ অর্থাৎ $y=c/x^2$, এগুলি অনুভূমিক রেখাগুলির সমীকরণ। $c=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ বসাইয়া আমরা অণুভূমিক রেখার পরিবার (family) পাই]

15. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির স্বাধীন চলরাশিগুলির অঞ্চল নির্ণয় কর :—

(i) $z=\frac{1}{x^2+y^2}$, (ii) $z=\log(y-2x)$,

(iii) $z=\log(x^3+y)$, (iv) $u=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

(v) $u=\log(4-x^2-y^2)$

ফাংশনের সীমার অনুশীলনী :

16. নিম্নলিখিত সীমাটি আলোচনা কর :—

$$\lim_{x \to \pi/2} \tan x.$$

17. সংজ্ঞানুযায়ী প্রমাণ কর

$$\frac{1}{x^2} + 2 \to 2, \text{ যখন } x \to \infty.$$

18. সংজ্ঞানুযায়ী দেখাও যে

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

19. যদি $f(x) = \dfrac{2x^2}{\pi} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\sin t}$ হয়,

তবে $(-1, 1)$ মুক্ত অন্তরালে $f(x)$ এর মূল্যায়ণ কর।

20. নিম্নলিখিত সীমাগুলি নির্ধারণ কর :—

(i) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{1 - \cos 2\theta}{\theta^2}$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \alpha x}{\tan \beta x}$,

(iii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$ (iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। [উত্তর (i) 2, (ii) α/β, (iii) -1, (iv) na^{n-1}]

21. যদি $f(x) = \sin(\pi/x)$, যখন $x \neq 0$

$= 0$, যখন $x = 0$

হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ আলোচনা কর।

22. নিম্নলিখিত সীমাটি আলোচনা কর—

$$\lim_{n \to \infty} x^n \;; \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

23. প্রমাণ কর :—

(i) $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x} = 0$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \log_e (1 + x) = 1$

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

(iv) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a$

24. যদি $f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}$ হয়, তবে সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $f(x)$ এর মূল্যায়ণ কর।

[সঙ্কেত : $f(x) = 0$, যখন $x^2 > 1$; $f(x) = 1$. যখন $x^2 < 1$; $f(x) = \frac{1}{2}$ যখন $x^2 = 1$]

25. (a) $\lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ এর মূল্যায়ন কর। [উত্তর 0]

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}]$ এর মূল্যায়ণ কর। [উত্তর 1]

26. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ এর মূল্যায়ণ কর। [উত্তর 0]

27. দেখাও যে

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \neq \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

এখন $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ আলোচনা কর।

28. দেখাও যে

$$\lim_{\substack{x \to 0+ \\ y \to 1}} \tan^{-1}(y/x) = \pi/2$$

এবং $\lim_{\substack{x \to 0- \\ y \to 1}} \tan^{-1}(y/x) = -\pi/2.$

প্রমাণ কর $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \tan^{-1}(y/x)$ বিদ্যমান নয়।

29. নিম্নলিখিত সীমাগুলি আলোচনা কর :—

(i) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ [সংকেত : $x - y = mx^3$]

(ii) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার অনুশীলনী

30. যদি $f(x)=\tan x$ হয়

তবে $x=\frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর।

31. কোন ফাংশন $f(x)$ এর $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা বলতে কি বুঝায় ব্যাখ্যা কর। নিম্নলিখিত উক্তিটির সত্যতা পরীক্ষা কর ঃ—

'$x\to a$ হলে যদি $f(x)$ এর সীমার অস্তিত্ব থাকে এবং $x=a$তে $f(x)$এর মান থাকে তবে $x=a$ তে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হবে'।

দেখাও যে $f(x)=x^2+1$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে সন্তত।

32. $f(x)=\dfrac{2x^4-4x^3+x^2+3}{x-1}$ ফাংশনটি কি $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন ?

33. দেখাও যে $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ফাংশনটি $x=\pm 1$ ব্যতীত সব বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

34. প্রমাণ কর $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলি $x=0,\ \pm\pi,$ $\pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots\cdots$

35. যদি $f(x)/g(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটি $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে প্রমাণ কর $f(x)$ ফাংশন $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

36. প্রমাণ কর

$$f(x)=\frac{\tan^{-1}x}{x},\ x\neq 0$$
$$=0\qquad ,\ x=0$$

$x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

37. প্রমাণ কর ঃ—এক বহুপদ রাশি (polynomial) যে কোন সসীম অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন।

38. প্রমাণ কর $\sin^{-1}(x^3-5)$ ফাংশনটি $-1\leqslant x^3-5\leqslant 1$ এর জন্য অবিচ্ছিন্ন।

39. প্রমাণ কর $\cos x$ ফাংশনটি x এর কোন বাস্তব মানে অবিচ্ছিন্ন।

40. যদি

$$f(x) = 0, \text{ যখন } x^2 > 1$$
$$= 1, \text{ যখন } x^3 < 1$$
$$= \tfrac{1}{2}, \text{ যখন } x^2 = 1$$

হয়, তবে দেখাও যে $f(x)$ ফাংশনটি $x = \pm 1$ বিন্দুতে অসন্তত।

41. অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের যে কোন একটি প্রয়োজনীয় ধর্মের উল্লেখ করে উদাহরণ সহকারে ব্যাখ্যা কর।

42. যদি

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= 0, \quad x = 0$$

হয়, তবে দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

43. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলি নির্ণয় কর :—

(i) $\tan x$; (ii) $\dfrac{x^4 + 2x + 5}{x^2 - 8x + 12}$; (iii) $\tan \dfrac{1}{x}$;

44. দেখাও যে $x = 0$ বিন্দুটি $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতার প্রথম শ্রেণীর বিন্দু।

45. দেখাও যে নিম্নলিখিত সমীকরণটির $(1, 2)$ অন্তরালে একটি বাস্তব বীজ আছেঃ

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

46. যদি $f(x) = \dfrac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$ হয়,

তবে দেখাও $f(x)$ ফাংশনটি $x = 0$ বিন্দুতে সংজ্ঞিত নয়। এখন $f(0)$ কে এমনভাবে সংজ্ঞিত কর যাতে $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন হয়।

47. $f(x, y, z)$ ফাংশনটি (a, b, c) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলতে কি বুঝায় ব্যাখ্যা কর।

দেখাও যে $\sin \dfrac{x}{y}$ ফাংশন x-অক্ষরেখায় বিচ্ছিন্ন।

48. নিম্নলিখিত ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা কর :—

$$f(x, y) = \frac{x + y^2}{y + x^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

49. দেখাও যে,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$
$$= 0 \qquad , \quad x^2 + y^2 = 0$$

(0, 0) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

50. দেখাও যে

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \ x > 0.$$

এবং $g(x) = \frac{1}{x^2}, \ x > 0.$

পরস্পর বিলোম ফাংশন ।

দ্বিতীয় খণ্ড

(অন্তরকলন)

পঞ্চম অধ্যায়

অন্তরকলনের মূলকথা

5.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

কলন বিদ্যায় অন্তরকলনের ধারণা বিশেষ প্রয়োজনীয়। অন্তরকলন বা ব্যবকলন কলন বিদ্যার মূলগত ক্রিয়া। অন্তরকলনের সাহায্যে বিন্দুর বেগ (velocity), বিন্দুর ত্বরণ (acceleration), বিন্দুর গতিপথের বক্রতা, সঞ্চারপথের কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি, কোন বস্তু বা বস্তুসমষ্টির বৃদ্ধি (হ্রাসের) হার, নির্ণয় করা সহজসাধ্য হয়। তাই অন্তরকলন প্রয়োগের ক্ষেত্রে সমধিক ব্যবহৃত হয়। প্রথমে এক চলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ (derivative) সম্বন্ধে ধারণা করা যাক্। মনে কর $f(x)$ ফাংশনটি এক মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে সংজ্ঞিত এবং $c \in (a, b)$; এখন নিরপেক্ষ চল x-এর c থেকে যদি বৃদ্ধি বা হ্রাস হয় h, তার জন্য ফাংশনের বৃদ্ধি বা হ্রাস হবে $f(c+h)-f(c)$। তাহলে h যখন শূন্যের অভিমুখী অর্থাৎ $h \to 0$, তখন

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \equiv \frac{f(c+h)-f(c)}{(c+h)-c}$$

অনুপাতটির সীমার যদি অস্তিত্ব থাকে তবে সেই সান্ত সীমাকে $f(x)$ এর $x=c$ বিন্দুতে অন্তরকলজ বলা হয়। স্পষ্টতঃ দেখা যায় অন্তরকলজ নির্ণয় করার পদ্ধতিতে সীমার কথা এসে যায়। বর্তমান অধ্যায়ে আলোচনাকালে দেখা যাবে যে অন্তরকলজের অস্তিত্বের জন্য ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা (continuty) একটি প্রয়োজনীয় (necessary) সর্ত। কিন্তু এই সর্ত পর্য্যাপ্ত (sufficient) নয়। অর্থাৎ $f(x)$ ফাংশনের c বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্বের জন্য $f(x)$ ফাংশনটি c বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে, কিন্তু $f(x)$ ফাংশনটি c বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলেও, c বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরকলজ না থাকতেও পারে। অন্তরকলন আলোচনার সময় আর একটি পরিভাষা যথা বিভেদক (অন্তরকল) বা বিভেদক সহগ (differential বা differential co-efficient) আসবে। এক চলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে এই দুইটি পরিভাষার (যথা অন্তরকলজ বা বিভেদক সহগ) বিশেষ কোনো পার্থক্য নাই। তাই প্রকৃতভাবে দুইটি পরিভাষা বোঝার পর এই দুইটি পরিভাষার যে কোন একটি লেখা যেতে পারে। বহু চলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে অন্তরকলজের ধারণা একটু বিশদভাবে করতে হয়, কারণ অন্তরকলজ নির্ণয়ের সময় কোন্ চলের বৃদ্ধি বা হ্রাস নেওয়া হচ্ছে তা লক্ষ্য রাখতে হয় এবং তখনই আংশিক

অন্তরকলজ সমূহের অস্তিত্ব বহু চলবিশিষ্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা বজায় রাখে না বলে আর একটি পরিভাষার (যথা দিকবিশিষ্ট অন্তরকলজ (directional derivative) প্রয়োজন হয়। কিন্তু এই দিকবিশিষ্ট অন্তরকলজও ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা বজায় রাখে না। বিভেদক ধারণার সাহায্যে বহুচল বিশিষ্ট ফাংশনের আলোচনা করা হয় এবং এ ক্ষেত্রে অন্তরকলজ ও বিভেদক এক নয়। এইসব আলোচনা আমরা নবম অধ্যায়ে বিশদভাবে করবো।

বর্তমান অধ্যায়ে আমরা একচল বিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ এবং বিভেদক সহগ পরিষ্কারভাবে আলোচনা করবো। এই দুইটি ধারণার সঙ্গতি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। অন্তরকলজের নিয়মগুলি এবং বিভেদক যুক্ত ফাংশনের ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে। সবশেষে উল্লেখযোগ্য কলন বিদ্যার পূর্ব অধ্যায়ে যে সব একচলবিশিষ্ট ফাংশনের উদাহরণ দেওয়া হয়েছে তাদের অন্তরকলজগুলি পাঠকদের মনে রাখতে হবে। অন্তরকলজ নির্ণয় করার অভ্যাস ভালোভাবে আয়ত্ব না করলে পরবর্তী অধ্যায়ে আলোচনা ও অঙ্ক কষা দুরূহ হয়ে উঠবে। তাই কলন বিদ্যার সীমার অভ্যাস এবং অন্তরকলজ নির্ণয়ের অভ্যাস খুব ভালোভাবে আয়ত্ব করা উচিত।

5.02 একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ

মনে কর $f(x)$ ফাংশনটি একটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে সংজ্ঞিত এবং $c \in (a, b)$। এখন যদি নিম্নলিখিত সীমার

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

সান্ত অস্তিত্ব থাকে তবে আমরা বলি $f(x)$ ফাংশনের $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলজ আছে এবং এই সীমাই $f(x)$ এর $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলজ। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে আমরা লিখি

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad \cdots \quad (1)$$

সীমার সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি $f(x)$ ফাংশনের $x = c$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্বের জন্য নিম্নলিখিত সীমা দুইটি সান্তভাবে বিদ্যমান থাকা প্রয়োজন

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \; ; \; \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

এবং উপরোক্ত সীমা দুইটি সমান হওয়ারও প্রয়োজন। উপরোক্ত সীমা দুইটি স্পষ্টতঃই বামপক্ষের এবং ডানপক্ষের সীমা নির্দেশ করে এবং সেহেতু আমরা লিখি

$$Lf'(c)=\lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

এবং $$Rf'(c)=\lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c};$$

এখন (1) থেকে সহজেই লেখা যায়

$$f'(c)=\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad \cdots \quad (2)$$

কারণ $x-c=h$ ধরে পাই $h\to 0$, যখন $x\to c$.

ফাংশনের কোন এক অন্তরালে অন্তরকলজ

এক চলবিশিষ্ট ফাংশনের কোন এক বিন্দুতে অন্তরকলজের সংজ্ঞা দেওয়া হলো। এবার ফাংশনের এক বিন্দুতে অন্তরকলজের সংজ্ঞার সাহায্যে কোন এক অন্তরালে অন্তরকলজের সংজ্ঞা দেওয়া হবে। যদি কোন এক ফাংশন $f(x)$ এক মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে সংজ্ঞিত হয়, এবং এই অন্তরালে প্রতি বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরকলজ থাকে তাহলে (a, b) অন্তরালে $f(x)$ এর অন্তরকলজ বা সাধারণ অন্তরকলজ নিম্নলিখিত সীমার দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে

$$f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

যেখানে $x \in (a, b)$.

উপরন্তু যদি কোনো ফাংশন $f(x)$ এক বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয়, তবে $f(x)$ এর এই বদ্ধ অন্তরালে অন্তরকলজ আছে বলতে বুঝায়

(i) $f'(c)$ সান্তভাবে বিদ্যমান, যখন $a<c<b$,

(ii) $Rf'(a)$ সান্তভাবে বিদ্যমান,

(iii) $Lf'(b)$ সান্তভাবে বিদ্যমান।

5.03 ফাংশনের অন্তরকলজের জ্যামিতিক তাৎপর্য্য

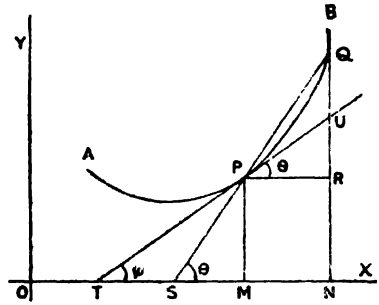
মনে কর $y=f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং এই অন্তরালে ফাংশনটির লেখচিত্র $APQB$; মনে কর $a<c<b$ এবং $OM=c$, $ON=c+h$

তাহলে, $PM = f(c)$

$$QN = f(c+h)$$

এখন আমরা পাই

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \frac{QN - PM}{MN} = \frac{QR}{PR} = \tan\theta,$$



যেখানে $\angle XSQ = \theta$ (QP জ্যা X অক্ষরেখার সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে) মনে করা যাক যখন লেখচিত্রের উপর দিয়ে $Q \to P$, তখন $QR \to 0$ এবং $PR \to 0$; তাহলে এই অবস্থায় QP জ্যা PT স্পর্শকে (P বিন্দুতে) পরিণত হবে এবং $\angle\theta$ এই অবস্থায় $\angle\psi$ তে পরিণত হবে।

সুতরাং যখন $Q \to P$ (লেখচিত্রের উপর দিয়ে), তখন $QR \to 0$, $PR \to 0$, QP জ্যা $\to$ স্পর্শক PT, এবং $\theta \to \psi$.

$$\therefore \quad f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$$

$$= \lim_{\theta \to \psi} \tan\theta$$

$$= \tan\psi$$

অতএব $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরকলজের জ্যামিতিক অর্থ হলো এই যে $(c, f(c))$ স্থানাঙ্কের বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতির ট্যানজেন্টই ফাংশনের c বিন্দুতে অন্তরকলজ।

50.4 কয়েকটি বিশেষ উদাহরণ :

উদাহরণ 1. দেখাও যে $f(x)=x$ ফাংশনটির x এর সকল বাস্তব মানের জন্য অন্তরকলজ বিদ্যমান।

উত্তর :—

এখানে $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

লক্ষ্য করা যেতে পারে যে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর অন্তরকলজ একটি ধ্রুবক ; $y=x$ এর লেখচিত্র একটি সরলরেখা এবং এই সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষরেখার সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণের ত্রিকোণমিতির ট্যানজেণ্টের মান 1.

উদাহরণ 2. প্রমাণ কর $f(x)=x^2$ ফাংশনটির $[0, 1]$ অন্তরালে অন্তরকলজ বিদ্যমান ।

উত্তর :—

এখানে আলোচনাকে আমরা তিনটি অংশে ভাগ করে নিতে পারি, যথা $(0, 1)$ মুক্ত অন্তরালের যে কোন বিন্দুতে আলোচনা, $x=0$ বিন্দুতে আলোচনা এবং $x=1$ বিন্দুতে আলোচনা।

মনে কর $c\in(0, 1)$; তাহলে

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(c+h)^2-c^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2c+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2c+h)=2c.$$

পরে সংজ্ঞানুসারে আমরা দেখি

$$f'(0)=Rf'(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0+}h=0.$$

শেষে আমরা দেখি

$$f'(1)=Lf'(1)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0-}(2+h)=2.$$

তাহলে $f(x)=x^2$ ফাংশনটির $[0, 1]$ বদ্ধ অন্তরালে অন্তরকলজ বিদ্যমান দেখা গেল। আমরা লিখতে পারি

$$f'(x)=2x,\ x\in[0, 1],$$

কারণ $f'(c)=2c$, যখন $c\in(0, 1)$ এবং

$$f'(0)=2\times 0=0,\ f'(1)=2\times 1=2.$$

মন্তব্য ঃ ফাংশনের অন্তরকলজের জ্যামিতিক অর্থ থেকে দেখা যায় যে যদি $y=f(x)$ বক্ররেখার $(c, f(c))$ বিন্দুতে স্পর্শক টানা যায় তবে সেই স্পর্শকের সমীকরণ হবে নিম্নরূপ ঃ

$$y-f(c)=f'(c)\cdot(x-c)$$

তাহলে উদাহরণ 2 থেকে আমরা সহজেই পাই যে $y=x^2$ বক্ররেখার যে বিন্দুর ভুজ $c\ (0\leqslant c\leqslant 1)$ সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-c^2=2c(x-c)$$

অথবা $y+c^2=2cx$

বক্ররেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকের (বা অভিলম্বের) সমীকরণ বাহির করার জন্য কলন বিদ্যার এই পদ্ধতি খুবই সুবিধাজনক। পরবর্তী অধ্যায়ে এ সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

উদাহরণ 3. নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব পরীক্ষা কর ঃ

$$f(x)=0,\quad \text{যখন}\quad x=0$$
$$=x,\quad \text{যখন}\quad x>0$$
$$=-x,\quad \text{যখন}\quad x<0$$

উত্তর ঃ—

এখানে আমরা লক্ষ্য করি

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0-} (-1) = -1$$

কিন্তু $Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0+} 1 = 1$$

যেহেতু $Lf'(0) \neq Rf'(0)$, $f'(0)$ এর অস্তিত্ব নাই।

উদাহরণ 4. মনে কর

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}, \text{ যখন } x \neq 0$$
$$= 0 \quad , \text{ যখন } x = 0$$

এখন $f'(0)$ এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করা যাক।

এখানে $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h} - 0}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}.$$

আমরা জানি $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ বিদ্যমান নয়। সুতরাং $f'(0)$ এর অস্তিত্ব নাই।

মন্তব্য ঃ—অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব নাই ঃ—

$$f(x) = x\cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$
$$f(0) = 0.$$

উদাহরণ 5. সংজ্ঞার সাহায্যে দেখাও যে

$$f'(0) = 0,$$

যখন $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, এবং $f(x) = 0$, $x = 0$

উত্তর ঃ—

$$\text{এখানে } f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h}.$$

$$\text{এখন আমরা জানি } \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ ; সুতরাং } f'(0) = 0$$

মন্তব্য ঃ—অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে যে $f'(0) = 0$, যখন

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$\text{এবং } f(0) = 0$$

5.05 ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরকলজের অস্তিত্ব

উপপাদ্য 1. যদি একটি ফাংশন $f(x)$ একটি বদ্ধ অন্তরালে $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং অন্তরালের যে কোন একটি বিন্দুতে ফাংশনের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে $f(x)$ ঐ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ ঃ—

প্রথম মনে করি $c \in (a, b)$; এখন উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী $f'(c)$ একটি সান্ত সংখ্যা।

$$\text{যেহেতু } f(c+h) - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} . h,$$

আমরা পাই

$$\lim_{h\to 0} [f(c+h) - f(c)] = \left\{\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right\}\left\{\lim_{h\to 0} h\right\}$$

$$= f'(c) . 0$$

$$= 0$$

অবিচ্ছিন্নতার সংজ্ঞানুসারে আমরা দেখি $f(x)$ ফাংশনটি $x = c$ $(a < c < b)$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

এখন $x=a$ বিন্দু (বামপ্রান্তবিন্দুতে) $f(x)$ এর অবিচ্ছিন্নতার আলোচনা করা যাক। প্রান্তবিন্দুতে ফাংশনের অন্তরকলজের সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই

$$f'(a)=Rf'(a)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

এখন $\lim_{h\to 0+}\{f(a+h)-f(a)\}$

$$=\left\{\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}\left\{\lim_{h\to 0+}h\right\}$$

$$=f'(a)\,.\,0=0$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0+}f(a+h)=f(a)$$

অতএব স্পষ্টত দেখা যায় $f(x)$ ফাংশনটি $x=a$ বিন্দুতে (শুধুমাত্র ডান দিকে) অবিচ্ছিন্ন ; যেহেতু ফাংশনটি $x=a$ এর বামদিকে সংজ্ঞিত নয় সেহেতু এই প্রান্তবিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন বলতে বুঝতে হবে যখন $h\to 0+$, তখন $f(a+h)\to f(a)$.

অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে যখন $f'(b)=Lf'(b)$ বিদ্যমান হয় তখন $f(x)$ ফাংশনটি $x=b$ বিন্দুতে (শুধুমাত্র বামদিকে) অবিচ্ছিন্ন।

মন্তব্য :—ফাংশনের কোন বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্বের ন্য ফাংশনের সেই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার সর্তটি প্রয়োজনীয়, কিন্তু পর্যাপ্ত নয়। এখানে অন্তরকলজের অস্তিত্বের অর্থ আমরা ধরেছি অন্তরকলজের সান্ত মান।

উদাহরণ :—

যদি একটি ফাংশন $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল [0, 1] তে সংজ্ঞিত হয় যেখানে

$$f(x)=x,\ 0\leqslant x\leqslant \tfrac{1}{2}$$
$$=1-x,\ \tfrac{1}{2}<x\leqslant 1$$

তবে দেখাও যে $f(x)$ ফাংশনটি $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু $f'(\frac{1}{2})$ এর অস্তিত্ব নাই।

উত্তর :—প্রথমে $f(x)$ ফাংশনের $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার আলোচনা করা যাক।

এখানে

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}-0} x=\tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}+0} (1-x)=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\tfrac{1}{2}$$

পুনরায় $f(\frac{1}{2})=[x]_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$

যেহেতু $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=f(\frac{1}{2})$, $f(x)$ ফাংশনটিকে $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

এখন $f(x)$ ফাংশনেয় $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব আলোচনা করা হবে।

$$Lf'(\tfrac{1}{2})=\lim_{h\to0-}\frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\frac{1}{2}+h-\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0-} 1=1$$

পুনরায় $$Rf'(\tfrac{1}{2})=\lim_{h\to0+}\frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{1-(\frac{1}{2}+h)-\frac{1}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to0+}(-1)=-1$$

যেহেতু $Lf'(\frac{1}{2})\neq Rf'(\frac{1}{2})$, $f'(\frac{1}{2})$ এর অস্তিত্ব নাই।

মন্তব্য :—উপরোক্ত উদাহরণের সাহায্যে স্পষ্টতঃ বুঝা যায় যে একটি ফাংশন কোনো বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলেও ফাংশনটির ঐ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে।

উদাহরণ :—নিম্নলিখিত ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার এবং অন্তরকলজের অস্তিত্ব আলোচনা কর :—

$$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x},\quad x\neq0$$
$$f(0)=0$$

উত্তর :—

এখানে $$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3\sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h^2 \sin \frac{1}{h} = \left\{ \lim_{h \to 0} h \right\} \left\{ \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} \right\}$$

আমরা জানি $\lim_{h \to 0} h = 0$ এবং $\lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$

$$\therefore \quad f'(0) = 0.$$

যেহেতু $f'(0)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান, সেহেতু উপপাদ্য 1 অনুসারে স্পষ্টতঃ বুঝা যায় $f(x)$ ফাংশনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

5.06 অন্তরকলজের বিকল্প সংজ্ঞা

যদি একটি ফাংশন $f(x)$ এর $x=c$ বিন্দুতে $(a < c < b)$ অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে, তবে সংজ্ঞানুসারে আমরা দেখি

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \phi(x), \quad \text{যেখানে } \phi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

এখন সীমার সংজ্ঞানুসারে অন্তরকলজের সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ—

$f(x)$ ফাংশনের $x=c$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকবে যদি প্রত্যেক $\epsilon > 0$ এর জন্য একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয় ঃ—

$$| \phi(x) - f'(c) | < \epsilon, \quad \text{যখন} \quad 0 < | x - c | < \delta$$

অর্থাৎ $\left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \epsilon, \quad$ যখন $0 < | x - c | < \delta$

উপরোক্ত অসমতাটি নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যেতে পারে ঃ

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right| < \epsilon, \quad \text{যখন} \ 0 < | h | < \delta.$$

উপপাদ্য 2: যদি $f(x)$ ফাংশনের $x=c$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ এমন থাকবে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হবে

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) + \eta,$$

যেখানে $\lim_{h \to 0} \eta = 0$ এবং $0 < | h | < \delta$.

প্রমাণ ঃ—

যেহেতু $f'(c)$ এর অস্তিত্ব আছে, সেহেতু আমরা লিখতে পারি—

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right| < \epsilon \ ; \ 0 < | h | < \delta$$

$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ এর পরিবর্তে $\phi(x)$ মনে করে পাই

$$|\phi(c+h)-f'(c)| < \epsilon; \quad 0 < |h| < \delta$$

$$\therefore \quad -\epsilon < \phi(c+h)-f'(c) < \epsilon$$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\phi(c+h)-f'(c)=\eta, \text{ যেখানে } -\epsilon < \eta < \epsilon$$

অথবা $\phi(c+h)=f'(c)+\eta$

$$\therefore \lim_{h\to 0} \phi(c+h)=\lim_{h\to 0} [f'(c)+\eta]$$

$$=f'(c)+\lim_{h\to 0} \eta$$

কিন্তু $\displaystyle\lim_{h\to 0} \phi(c+h)=\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)$

অতএব $\displaystyle\lim_{h\to 0} \eta=0$

$$\therefore \frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)+\eta, \text{ যেখানে } \lim_{h\to 0} \eta=0, \; 0<|h|<\delta$$

5.07 বিভেদক বা অন্তরকল

মনে কর $f(x)$ ফাংশনের x বিন্দুতে অন্তরকলজ $f'(x)$ আছে। এখন যদি x কে সামান্য পরিবর্তিত করা হয় অর্থাৎ xকে একটু কম বা বেশী করা হয়, এবং x এর এই পরিবর্তনকে যদি Δx দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহলে x যখন $x+\Delta x$ এ পরিবর্তিত হয় তখন $f(x)$ ফাংশন $f(x+\Delta x)$ এ পরিবর্তিত হয়। এখন $f(x)$ এর পরিবর্তন $=f(x+\Delta x)-f(x)$; $f(x)$ এর এই পরিবর্তনকে যদি $\Delta f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে আমরা পাই

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

অথবা $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$; [যদি $y=f(x)$ হয়]

এখন উপপাদ্য 2 থেকে পাই

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\eta$$

অর্থাৎ $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\,\Delta x+\eta\Delta x,$

যেখানে $\lim_{\Delta x\to 0} \eta=0$ এবং $0 < |\Delta x| < \delta$.

$$\therefore \quad \Delta y=f'(x)\ \Delta x+\eta\ \Delta x \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

এখন লক্ষ্য করা যেতে পারে যে $f(x)$ এর x বিন্দুতে যখন অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তখন (i) সমতাটি সিদ্ধ হয়। $f'(x)\ \Delta x$ কে আমরা $f(x)$ এর x বিন্দুতে বিভেদক বা অন্তরকল (Differential) বলি এবং প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$df(x)=f'(x)\Delta x$$

$$\therefore \quad df(x)=f'(x)\Delta x=\Delta y-\eta\Delta x$$

সংজ্ঞা ঃ একটি ফাংশন $f(x)$ যদি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সজ্ঞিত হয় তাহলে $f(x)$ ফাংশনটি x বিন্দুতে বিভেদকযোগ্য বা অন্তরকলযোগ্য বলা হবে যদি x এর একটি অঞ্চলের যে কোন বিন্দু (যথা $x+\Delta x$) তে $f(x+\Delta x)$ কে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+\eta\Delta x,$$

যেখানে A রাশি Δx তার উপর নির্ভরশীল নয় এবং $\eta\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$.

উপপাদ্য 3. একটি ফাংশন $f(x)$ এর কোন বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য হবার **প্রয়োজনীয়** ও **পর্য্যাপ্ত** সর্ত এই যে $f(x)$ ফাংশনটির ঐ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকবে।

প্রমাণ ঃ—প্রথম ধরা যাক $f(x)$ ফাংশনটি x বিন্দুতে অন্তরকলযোগ্য।

তাহলে আমরা পাই

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+\eta\Delta x,$$

যেখানে A রাশি Δx এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং $\eta\to 0$ যখন $\Delta x\to 0$

$$\therefore \quad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=A+\eta$$

সুতরাং $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[A+\eta]=A+\lim_{\Delta x\to 0}\eta=A$$

উপরোক্ত সীমার অস্তিত্ব থেকে প্রমাণিত হয় $f(x)$ এর অন্তরকলজ A বিদ্যমান। বিপরীতভাবে ধরা যাক $f(x)$ এর x বিন্দুতে অন্তরকলজ $f'(x)$ বিদ্যমান। তাহলে (i) থেকে পাওয়া যায়

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\eta\Delta x,$$

যেখানে $\lim_{\Delta x\to 0}\eta=0$, এবং $0 < |\Delta x| < \delta$.

এখন অন্তরকলযোগ্যতার সংজ্ঞা থেকে স্পষ্টতঃই বুঝা যায়

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+\eta\Delta x,$$

যেখানে $A=f'(x)$

মন্তব্য 1 আমরা জানি $f(x)$ এর বিভেদক বা অন্তরকল নিম্নলিখিত সমীকরণের সাহায্যে লেখা যেতে পারে

$$df(x)=f'(x)\Delta x$$

এখন যদি $f(x)=x$ ধরি তাহলে দেখা যায়

$$f'(x)=1 \text{ এবং } dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$$

$$\therefore \quad df(x)=f'(x)dx$$

অথবা $\dfrac{df(x)}{dx}=f'(x).$

$y=f(x)$ লিখলে আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

অর্থাৎ $f(x)$ এর অন্তরকলজকে দুইটি বিভেদক (যথা dy এবং dx) এর অনুপাত হিসাবে লেখা যেতে পারে। $\dfrac{dy}{dx}$কে কখনও কখনও অন্তরকল সহগ বা বিভেদক সহগ বলা হয়। সুতরাং একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ ও বিভেদক সহগের মধ্যে কোনো পার্থক্য নাই, সেইজন্য অনেক সময় ফাংশনের অন্তরকলজকে $\dfrac{dy}{dx}$ এর সাহায্যে লেখা হয়।

অন্তরকলজ এবং বিভেদক সহগের সমতা থেকে পাওয়া যায়

$$dy=f'(x)dx.$$

অন্তরকলজের অন্যান্য প্রতীক চিহ্ন নিম্নরূপ ঃ .

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} \text{ বা } D\{f(x)\} \text{ বা } f^{(1)}(x) \text{ বা } f_1(x).$$

মন্তব্য 2. পুনরায় আমরা লক্ষ্য করেছি

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\eta\Delta x$$

এখন মনে কর $f'(x)\neq 0$

আবার $dy=f'(x)\Delta x$

$$\therefore \quad \Delta y=dy+\eta\Delta x$$

অথবা $\dfrac{\Delta y}{dy} = 1 + \dfrac{\eta}{f'(x)}$.

সুতরাং $\dfrac{\Delta y}{dy} \neq 1$, কারণ $\eta \neq 0$.

তাহলে লক্ষ্য করা যায় $\Delta y \neq dy$, যদিও $\Delta x = dx$.

কিন্তু $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\eta}{f'(x)} = 1$

$\left[\because \lim\limits_{\Delta x \to 0} \eta = 0 \right.$ এবং $\left. f'(x) \neq 0 \right]$

মন্তব্য 3 পুনরায় আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \eta$$

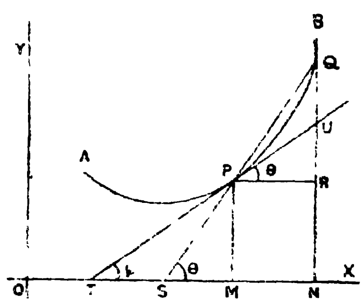
$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \quad \left[\because \lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0 \right]$$

আবার আমরা জানি $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

5.08 ফাংশনের বিভেদকের জ্যামিতিক তাৎপর্য্য :

5.03 অনুচ্ছেদের চিত্র থেকে আমরা পাই



$$OM = x, \quad ON = x + \Delta x$$

$$\therefore \quad PM = f(x)$$

$$QN = f(x + \Delta x)$$

যদি $y = f(x)$, তবে $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$= QN - PM$$
$$= RQ$$
$$= RU + UQ$$

এখন $RU = PR \tan \psi \quad [\because \angle RPU = \psi]$

$$= \Delta x \tan \psi$$
$$= \Delta x f'(x)$$

$\therefore \quad \Delta y = \Delta x f'(x) + UQ.$

যেহেতু $f(x)$ ফাংশনের x বিন্দুতে বিভেদক $f'(x)\Delta x$ এর সমান, চিত্রে RU বিভেদক সূচিত করে, লক্ষ্য করা যেতে পারে $UQ = \eta \Delta x$

এখন $RQ \to RU$, যখন $Q \to P$

অর্থাৎ $f(x + \Delta x) - f(x) \to f'(x)\Delta x$, যখন $\Delta x \to 0$ (i)

মন্তব্য 1. বিভেদকের (i) নং ধর্মটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে

$$| f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x | < \epsilon \Delta x, \ \epsilon \to 0$$

মন্তব্য 2. $f(x)$ এর x বিন্দুতে বিভেদককে যদি $g(x \,;\, \Delta x)$ প্রতীক চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয়, তবে

$$g(x \,;\, \Delta x) = f'(x)\Delta x$$

এখন α এবং β দুইটি বাস্তব সংখ্যার জন্য আমরা পাই

$$g(x \,;\, \alpha\Delta x + \beta\delta x)$$
$$= \{\alpha\Delta x + \beta\delta x\} \cdot f'(x)$$
$$= \alpha\{f'(x)\Delta x\} + \beta\{f'(x)\delta x\}$$
$$= \alpha g(x \,;\, \Delta x) + \beta g(x \,;\, \delta x), \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

যেখানে Δx এবং δx সূচিত করে x এর দুইটি পরিবর্তণ।

কলনবিদ্যায় (ii) নং ধর্ম বিভেদকের রৈখিক ধর্ম (linearity property of differential) নামে পরিচিত।

5.09 সংজ্ঞার সাহায্যে কতকগুলি আদর্শ ফাংশনের অন্তরকলজ—

(A) $\log_e x$ (সংক্ষেপে $\log x$) ফাংশনের অন্তরকলজ :—

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{x} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$$

এখন $\lim\limits_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}$ নির্ণয় করার জন্য মনে কর $\frac{h}{x} = z$, তাহলে $z \to 0$ যখন $h \to 0 (x \neq 0)$. যখন $x > 0$, তখন $\log x$ সংজ্ঞিত।

$$\therefore \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \lim_{z \to 0} \log\{(1 + z)^{1/z}\}$$

$$= \log\left\{ \lim_{z \to 0} (1 + z)^{1/z} \right\},$$

(যেহেতু $\log x$ ফাংশনটি $(0, \infty)$ অন্তরালে সংজ্ঞিত)

$$= \log_e e \left[\because \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \right]$$

$$= 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\log_e x) = \frac{1}{x} \; ; \quad x > 0.$$

(B) e^x ফাংশনের অন্তরকলজ :—

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right)$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

এখন $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$ নির্ণয় করার জন্য মনে কর $e^h - 1 = k$, তাহলে

$$\log(1 + k) = h \; ;$$

সুতরাং আমরা পাই

$$\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{k\to0}\frac{k}{\log(1+k)}=\lim_{k\to0}\frac{1}{\log(1+k)^{1/k}}$$

$$=1\Big/\left\{\lim_{k\to0}\log(1+k)^{1/k}\right\}$$

$$=1\Big/\left[\log\left\{\lim_{k\to0}(1+k)^{1/k}\right\}\right]$$

$$=1/\log_e e=1$$

$$\therefore\quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{e}^x)=\mathbf{e}^x.$$

(C) ত্রিকোণমিতীয় ফাংশনের অন্তরকলজ :—

(i) মনে কর $f(x)=\sin x$

$$\therefore\quad \frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$=\left\{\lim_{h\to0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right\}\left\{\lim_{h\to0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}$$

এখন $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin h/2}{h/2}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\sin k}{k}\quad\left(\dfrac{h}{2}=k\right.$ মনে কর$\left.\right)$

এবং $\lim\limits_{h\to0}\cos(x+h/2)=\cos x$ (যেহেতু $\cos x$ একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন)

$$\therefore\quad \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{\sin x})=\mathbf{\cos x}.$$

মন্তব্য : মনে রাখা দরকার $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ নির্ণয় করার সময় আমরা ($\sin x<x<\tan x$ অসমতাটির সাহায্য লই এবং x সেখানে রেডিয়ানে মাপা হয়েছিল। অতএব $\sin x$ এর অন্তরকলজ $\cos x$ তখনই যখন x রেডিয়ানে প্রকাশিত।

(ii) মনে কর $f(x)=\cos x$

অনুরূপভাবে দেখাও যে

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x.$$

(iii) মনে কর $f(x)=\tan x$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\{(x+h)-x\}}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right\}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot 1\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\sec^2 x\ \left(x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x\ ;\ x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

(iv) মনে কর $f(x)=\cot x$

অনুরূপভাবে দেখাও যে

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\operatorname{cosec}^2 x\ ;\ x\neq n\pi.$$

(v) মনে কর $f(x)=\operatorname{cosec} x$

এখানে $\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin h/2\cos(x+h/2)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$=-\frac{1}{\sin x}\left[\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\right\}\times\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h/2)}{\sin(x+h)}\right\}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \cdot 1 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x \,;\; x \neq n\pi$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x \,;\; x \neq n\pi$$

(vi) মনে কর $f(x) = \sec x$

অনুরূপভাবে দেখাও যে

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \,.\, \tan x \,;\; x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

5.10 অন্তরকলজ নির্ণয়ের নিয়মাবলী

নিয়ম 1 : শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule)

যদি $y = f(z)$ এবং $z = \phi(x)$ হয় তাহলে $y = f[\phi(x)]$; অতএব আমরা লিখতে পারি

$$y = \psi(x)$$

এখন যদি $f(z)$ ফাংশনের z বিন্দুতে অন্তরকলজ থাকে তবে $f(z)$ অন্তরকলযোগ্য হবে। সুতরাং আমরা পাই

$$\Delta y = \Delta f(z) = f'(z)\Delta z + \epsilon_1 \Delta z \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেখানে $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \epsilon_1 = 0$

পুনরায় যদি $\phi(x)$ এর অন্তরকলজ বিদ্যমান থাকে তবে আমরা পাই

$$\Delta z \equiv \Delta \phi(x) = \phi'(x)\Delta x + \epsilon_2 \Delta x \qquad \ldots \quad \text{(ii)}$$

যেখানে $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon_2 = 0$

(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায়

$$\Delta y = \{f'(z) + \epsilon_1\}\{\phi'(x)\Delta x + \epsilon_2 \Delta x\}$$

$$= f'(z)\phi'(x)\Delta x + \epsilon_3 \Delta x,$$

যেখানে $\epsilon_3 = \epsilon_1 \phi'(x) + \epsilon_2 f'(z) + \epsilon_1 \epsilon_2$

এখন $\epsilon_3 \to 0$, যখন $\Delta x \to 0$; সুতরাং

$$\Delta y = f'(z)\phi'(x)\Delta x + \epsilon_3 \Delta x \qquad \ldots \quad \text{(iii)}$$

যেখানে $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon_3 = 0$

(iii) থেকে স্পষ্টতঃই দেখা যায় $y=\psi(x)$ অন্তরকলযোগ্য ; সুতরাং $\psi(x)$ এর অন্তরকলজ বিদ্যমান হবে।

$$\therefore \quad \mathbf{dy = f'(z)\phi'(x)\,.\,dx}$$

অর্থাৎ $\dfrac{dy}{dx}=\psi'(x)=f'(z)\phi'(x)$

অথবা, $\dfrac{d}{dx}\{f(\phi(x)\}\equiv\dfrac{d}{dx}\{f(z)\}$

$$=\left\{\frac{d}{dz}f(z)\right\}\left\{\frac{d}{dx}\phi(x)\right\}$$

$$=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$; যখন $y=f(x)$ এবং $z=\phi(x)$

উপরোক্ত নিয়মই কলন বিদ্যায় শৃঙ্খল নিয়ম নামে পরিচিত। এই নিয়মটি ফাংশনের অন্তরকলজ নির্ণয় করার পক্ষে খুবই উপযোগী।

উদাহরণ : মনে কর $y=\sin z$ এবং $z=\cos x$

এখানে $y=\sin(\cos x)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$=\cos z\,.\,(-\sin x)$$

$$=-\cos(\cos x)\sin x$$

মন্তব্য : শৃঙ্খল নিয়মটি সামান্যীকরণ করলে পাওয়া যায়

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx_2}\;\frac{dx_2}{dx_3}\cdots\frac{dx_{n-1}}{dx_n}\;\frac{dx_n}{dx}$$

উদাহরণ : মনে কর $y=\sin\log\cos e^x$

এখানে মনে করা যেতে পারে

$$y=\sin x_1,\ x_1=\log x_2,\ x_2=\cos x_3,\ x_3=e^x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_1}\;\frac{dx_1}{dx_2}\;\frac{dx_2}{dx_3}\;\frac{dx_3}{dx}$$

$$=\cos x_1\,.\frac{1}{x_2}\left(-\sin x_3\right).\,e^x$$

$$=\frac{-(\cos\log\cos e^x)(\sin e^x)\,.\,e^x}{\cos e^x}$$

নিয়ম 2 ঃ যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটির অন্তরকলজ থাকে তবে

$$\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$$

প্রমাণ ঃ—

মনে কর $\psi(x) = f(x) + g(x)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\psi(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x).$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে যে

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

উদাহরণ ঃ $\frac{d}{dx}(\cos x - \log x) = -\sin x - \frac{1}{x}$

নিয়ম 3 ঃ যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটির অন্তরকলজ থাকে তবে

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\, g(x)\} = f(x)\left\{\frac{d}{dx} g(x)\right\} + g(x)\left\{\frac{d}{dx} f(x)\right\}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}$ { প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশন }

= (প্রথম ফাংশন)(দ্বিতীয় ফাংশনের অন্তরকলজ)

\+ (দ্বিতীয় ফাংশন) (প্রথম ফাংশনের অন্তরকলজ)

প্রমাণ ঃ—

মনে কর $\psi(x) = f(x) \,.\, g(x)$

$$\therefore \quad \log_e \psi(x) = \log_e f(x) + \log_e g(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\{\log_e \psi(x)\} = \frac{d}{dx}\{\log_e f(x) + \log_e g(x)\}$$

অথবা $$\frac{d}{dx}\{\log_e \psi(x)\} = \frac{d}{dx}\{\log_e f(x)\} + \frac{d}{dx}\{\log_e g(x)\}$$

শৃঙ্খল নিয়মানুসারে আমরা পাই

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)} \qquad [\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x), \text{ ইত্যাদি }\}$$

অথবা $$\psi'(x)=\psi(x)\left\{\frac{f(x)\,g'(x)+g(x)f'(x)}{f(x)\,g(x)}\right\}$$

$$=f(x)\,g'(x)+g(x)\;f'(x).$$

মন্তব্য : (i) নিয়ম 3এর প্রমাণ নিয়ম 2এর মত করা যেতে পারে। কিন্তু এখানে নিয়ম 3এর যে প্রমাণ দেওয়া হল তা কলন-বিদ্যায় '**লগারিদম অন্তরকলজ পদ্ধতি**' নামে পরিচিত, যেহেতু এই পদ্ধতিতে প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষের লগারিদম নেওয়া হয়েছে এবং পরে উভয় পক্ষের অন্তরকলজ নির্ণয় করা হয়েছে। এই পদ্ধতিটি পাঠকদের বিশেষ ভাবে আয়ত্ব করা উচিত কারণ অনেক জটিল অঙ্কের সমাধান এই **পদ্ধতির** সাহায্যে করা হবে। উপরন্তু এই পদ্ধতির একটি সুবিধাজনক দিক আছে ; যথা এই নিয়মের সাহায্যে **নিয়ম** 3 এর সামান্যীকরণ করা যেতে পারে। যেমন মনে কর

$$\psi(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x)$$

$$\therefore \quad \log\psi(x)=\log f_1(x)+\log f_2(x)+\cdots+\log f_n(x)$$

এখন শৃঙ্খল নিয়মানুসারে

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{f_1{}'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2{}'(x)}{f_2(x)}+\cdots\cdots+\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \psi'(x)=&f_1{}'(x)f_2(x)f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)\\&+f_1(x)f_2{}'(x)f_3(x)\cdots\cdots f_n(x)\\&+f_1(x)f_2(x)f_3{}'(x)\cdots f_n(x)\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+f_1(x)f_2(x)f_3(x)\ldots\ldots f_n{}'(x)\end{aligned}$$

অতএব লগারিদম অন্তরকলজ পদ্ধতির সাহায্যে ফাংশনের গুণফলের অন্তরকলজ-এর নির্ণয় সহজ হয়ে উঠেছে।

(2) নিয়ম 2এর সামান্যীকরণ করা যেতে পারে। যথা :

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\cdots\pm f_n(x)\}$$

$$=\frac{d}{dx}f_1(x)\pm\frac{d}{dx}f_2(x)\pm\cdots\pm\frac{d}{dx}f_n(x).$$

(3) নিয়মগুলির সামান্যীকরণ ক্ষেত্রে n অনন্ত নেওয়া যেতে পারে না, কারণ তাহলে অভিসরণের প্রশ্ন উঠতে পারে।

উদাহরণ :

1. মনে কর $\psi(x) = e^x \sin x (\log x)$

এখানে $$\psi'(x) = \frac{d}{dx}(e^x) \sin x (\log x)$$
$$+ e^x \left\{\frac{d}{dx}(\sin x)\right\} (\log x)$$
$$+ e^x \sin x \left\{\frac{d}{dx} \log x\right\}$$
$$= e^x \sin x (\log x) + e^x \cos x (\log x) + \frac{e^x \sin x}{x}$$

2. মনে কর $\psi(x) = \tan x = (\sin x)(\sec x)$

$$\therefore \quad \psi'(x) = \left\{\frac{d}{dx} \sin x\right\} \sec x + \sin x \left\{\frac{d}{dx} \sec x\right\}$$
$$= \cos x \,.\, \sec x + \sin x \,.\, \sec x \,.\, \tan x$$
$$= 1 + \tan^2 x$$
$$= \sec^2 x.$$

নিয়ম 4 : যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ ফাংশন দুইটির অন্তরকলজ থাকে তবে

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left\{\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}\right\} = \frac{\mathbf{f'(x)\, g(x) - g\,(x)\, f(x)}}{\{\mathbf{g(x)}\}^2}$$

অর্থাৎ $$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\text{লব}}{\text{হর}}\right\} = \frac{(\text{লবের অন্তরকলজ})\ (\text{হর}) - (\text{হরের অন্তরকলজ})\ (\text{লব})}{(\text{ হর })^2}$$

প্রমাণ :—

মনে কর $\psi(x) = f(x)/g(x)$

$$\therefore \quad \log_e \psi(x) = \log_e f(x) - \log_e g(x)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_e \psi(x) = \frac{d}{dx} \log_e f(x) - \frac{d}{dx} \log_e g(x)$$

শৃঙ্খল নিয়মানুসারে

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

$$\therefore \quad \psi'(x) = \psi(x) \left\{\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{f(x)g(x)}\right\} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}$$

উদাহরণ :

1. মনে কর $\psi(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\therefore \quad \psi'(x)=\frac{\left\{\frac{d}{dx}(\sin x)\right\}\cos x-\left\{\frac{d}{dx}(\cos x)\right\}\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

2. মনে কর $\psi(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

$$\therefore \quad \psi'(x)=\frac{(\cos x)x-1\,.\,\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

5.11 পূর্বোক্ত নিয়মগুলির সাহায্যে কতকগুলি বিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ :

(A) (i) $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{c})=\mathbf{0}$, যেখানে c একটি ধ্রুবক

(ii) $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\{\mathbf{c}\,.\,\mathbf{f(x)}\}=\mathbf{cf'(x)}$

প্রমাণ :—

(i) মনে করি $f(x)=c$

$$\therefore \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\{c.f(x)\}=c.\dfrac{d}{dx}\{f(x)\}+f(x)\dfrac{d}{dx}(c)$

[নিয়ম 3 অনুসারে]

$$=c\,.\,f'(x)+f(x)\times 0$$
$$=cf'(x).$$

(B) x^n ফাংশনের অন্তরকলজ, যেখানে n একটি বাস্তব সংখ্যা :—

মনে করি $\psi(x)=x^n$

$$\therefore \quad \log_e\psi(x)=n\log_e x$$

এখন $\frac{d}{dx}\{\log_e \psi(x)\} = \frac{d}{dx}(n \log_e x)$

শৃঙ্খল নিয়মানুসারে

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = n.\frac{1}{x} \text{ (যেহেতু } n \text{ একটি ধ্রুবক)}$$

$$= \frac{n}{x}$$

$$\therefore \quad \psi'(x) = \frac{n}{x} \cdot x^n = nx^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

(C) বিলোম বা বিপরীত (Inverse) ফাংশনের অন্তরকলজ

মনে করি $y = f(x)$ ফাংশনটি xএর মানের একটি অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং যথাযথ আরোহী বা অবরোহী, তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$x = \phi(y),$$

যেখানে ϕ ফাংশন f ফাংশনের বিপরীত বা বিলোম ফাংশন। এখন মনে করি $f(x)$ ফাংশনের x বিন্দুতে অন্তরকলজ আছে এবং এই অন্তরকলজের মান কোন অবস্থাতে শূন্য নয়।

$$\text{তাহলে } \phi'(y) = \lim_{k \to 0} \frac{\phi(y+k) - \phi(y)}{k}$$

মনে করি $\phi(y+k) = x + h$ তাহলে $h \to 0$ যখন $k \to 0$

$$\therefore \quad \phi'(y) = \lim_{k \to 0} \frac{\phi(y+k) - \phi(y)}{k} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{f(x+h) - f(x)}$$

$$[\because \quad y = f(x)]$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 \Big/ \left\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right\}$$

$$= 1/f'(x) \qquad [\because \quad f'(x) \neq 0]$$

উদাহরণ :

1. যদি $y = e^x$, তাহলে $x = \log_e y$

এখানে $f(x) = e^x$, $\qquad \phi(y) = \log_e y$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\log_e y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

অতএব e^x এর অন্তরকলজের মাধ্যমে $\log y$ ফাংশনের অন্তরকলজ পাওয়া সম্ভব হচ্ছে, যেহেতু এই দুইটি ফাংশন পরস্পর বিলোম বা বিপরীত।

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

2. যদি $y = \sin x$, তবে $x = \sin^{-1} y$

এখানে $f(x) = \sin x$, $\phi(y) = \sin^{-1} y$

$$\therefore \quad \frac{d}{dy}(\sin^{-1} y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. অনরূপভাবে দেখানো যেতে পারে

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

এখানে লক্ষ্য করা যেতে পারে

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad [\text{ ত্রিকোণমিতি থেকে }]$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

অথবা $\quad \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) - \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$

এখন $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ জানা থাক্‌লে $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x)$ সহজেই নির্ণয় করা যায়। যথা

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. যদি $y = \tan x$, তবে $x = \tan^{-1} y$

এখানে $f(x) = \tan x$, $\phi(y) = \tan^{-1} y$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

5. যেহেতু ত্রিকোণমিতি থেকে জানা আছে যে

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = 0$$

অথবা $$\frac{d}{dx}(\cot^{-1}) x = -\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. যদি $y = \sec x$, তবে $x = \sec^{-1} y$.

এখানে $f(x) = \sec x$, $\phi(y) = \sec^{-1} y$

$$\therefore \quad \frac{d}{dy}(\sec^{-1} y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sec x \tan x}$$

$$= \frac{1}{\sec x \sqrt{(\sec^2 x - 1)}} = \frac{1}{y\sqrt{(y^2-1)}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

7. যেহেতু $\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \pi/2$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x)$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

5.12 ফাংশনের কোন বিন্দুতে আরোহ বা অবরোহের প্রকৃতি

মনে করি $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত।

মনে করি $a < c < b$

এখানে যদি c এর এমন একটি অঞ্চল $(c-\delta, c+\delta)$ থাকে, যে অঞ্চল থেকে c তুলে নেওয়া হয়েছে, যেখানে নিম্নলিখিত অসমতা সিদ্ধ হয়

$$h[f(c+h) - f(c)] > 0, \ 0 < |h| < \delta$$

তবে $f(x)$ ফাংশনকে $x = c$ বিন্দুতে আরোহী বলা হয়।

অনুরূপভাবে $f(x)$ ফাংশনকে $x = c$ বিন্দুতে অবরোহী বলা হবে যদি

$$h[f(c+h) - f(c)] < 0, \ 0 < |h| < \delta$$

সিদ্ধ হয়।

উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় যে $f(x)$ ফাংশনটি যদি $x=c$ বিন্দুতে আরোহী হয়, তবে

$$f(c+h)>f(c), \text{ যখন } h>0$$

$$\text{এবং } f(c+h)<f(c), \text{ যখন } h<0.$$

অনুরূপভাবে $f(x)$ ফাংশনটি যদি $x=c$ বিন্দুতে অবরোহী হয়, তবে

$$f(c+h)<f(c), \text{ যখন } h>0$$

$$\text{এবং } f(c+h)>f(c), \text{ যখন } h<0.$$

উপপাদ্য 4. যদি $f'(c)$ বিদ্যমান থাকে তবে $f(x)$ ফাংশনটি $x=c$ বিন্দুতে আরোহী বা অবরোহী হবে যদি যথাক্রমে $f'(c)>$ বা <0 হয়।

প্রমাণ :—

প্রথমে মনে করি $f'(c)>0$

তাহলে এমন একটি $\epsilon>0$ আছে যাতে $0<\epsilon<f'(c)$ সিদ্ধ হয়। তখন অন্তরকলজের বিকল্প সংজ্ঞা (§ 5.06) থেকে পাওয়া যায়

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-f'(c)\right|<\epsilon,\ 0<|h|<\delta$$

$$\therefore\quad f'(c)-\epsilon<\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<f'(c)+\epsilon,\ 0<|h|<\delta$$

যেহেতু $f'(c)-\epsilon>0$, আমরা পাই

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$$

$$\text{অথবা}\quad \frac{h[f(c+h)-f(c)]}{h^2}>0$$

$$\therefore\quad h[f(c+h)-f(c)]>0\ ;\ 0<|h|<\delta.$$

উপরোক্ত অসমতা থেকে স্পষ্টতঃ প্রতীয়মান হয় $f(x)$ ফাংশনটি $x=c$ বিন্দুতে আরোহী।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে যে যদি $f'(c)<0$, তবে $f(x)$ ফাংশনটি $x=c$ বিন্দুতে অবরোহী।

উদাহরণ : নিম্নলিখিত ফাংশনটির আরোহ ও অবরোহের প্রকৃতি আলোচনা কর।

$$f(x)=x^4$$

এখানে $f'(x)=4x^3$

$\therefore\ f'(x)>0$, যখন $x>0$ এবং $f'(x)<0$, যখন $x<0$

অর্থাৎ x এর ধনাত্মক মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনটি আরোহী এবং x-এর ঋণাত্মক মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনটি অবরোহী।

মন্তব্য : ফাংশনের আরোহ এবং অবরোহের প্রকৃতি ফাংশনের পরম ও অবম মান নির্ণয়ের পক্ষে খুবই প্রয়োজনীয়। এ সম্বন্ধে অষ্টম অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে।

5.13 বিবিধ উদাহরণ :

1. $y = c\,\dfrac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2}$

বক্ররেখার যে কোনও বিন্দুতে স্পর্শক ও x অক্ষের মধ্যবর্তী কোণকে ψ দ্বারা চিহ্নিত করলে দেখাও যে $y = c \sec \psi$

উত্তর :—

অন্তরকলজের জ্যামিতিক অর্থ থেকে জানি

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{c}e^{\frac{x}{c}} - \frac{1}{c}e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

$$\therefore \quad \sec^2 \psi = 1 + \tan^2 \psi = 1 + \frac{\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)^2}{4}$$

$$= \frac{\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)^2}{4}$$

$$\therefore \quad c \sec \psi = c.\frac{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}{2} = y \text{ [প্রমাণিত]}$$

2. সংজ্ঞানুসারে $x = \pi/4$ বিন্দুতে $\tan x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

উত্তর :—

মনে করি $f(x) = \tan x$

$$\therefore \quad f'(\pi/4) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1+\tan h}{1-\tan h}-1\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\tan h}{h}$$

$$=2\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right\}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos h}\right\}$$

$$=2.1.1$$

$$=2.$$

3. প্রমাণ কর ঃ

$$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ .\ \log_e a$$

এখন দেখাও

$$\frac{d}{dx}(\log_a x)=(x\ \log_e a)^{-1}$$

উত্তর ঃ—

মনে কর $y=a^x$

$$\therefore\quad \log_e y=(\log_e a)x$$

উভয়পক্ষের x সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dx}(\log_e y)=\frac{d}{dx}\{x.\ \log_e a\}$$

বা, $\left\{\frac{d}{dy}(\log_e y)\right\}\frac{dy}{dx}=1.\ \log_e a$

$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=y\log_e a=a^x.\ \log_e a$ [প্রমাণিত]

এখন যদি $y=f(x)$ হয়, তাহলে $x=f^{-1}(y)$

$$\therefore\quad \frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\frac{d}{dx}(f(x))}$$

যদি $y=a^x$ হয়, তবে $x=\log_e y$

$$\therefore\quad \frac{d}{dy}(\log_a y)=\frac{1}{\frac{d}{dx}(a^x)}=\frac{1}{a^x\ \log_e a}=(y\ \log_e a)^{-1}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(\log_a x) = (x \log_e a)^{-1}$

4. যদি সংজ্ঞানুসারে

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

এবং $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} (\mathbf{sinh\ x}) = \mathbf{cosh\ x} \text{ এবং } \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{cosh\ x}) = \mathbf{sinh\ x}$$

উত্তর :—

$$\frac{d}{dx} (\sinh x) = \frac{d}{dx} [\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})] = \tfrac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

এবং $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}[\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})] = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$

5. যদি $x = a(\theta + \sin \theta)$ এবং $y = a(1 - \cos \theta)$ হয়

তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta/2$$

উত্তর :—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \left(\frac{dy}{d\theta}\right) \Big/ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)$$

এখন $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta) = 2a \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$

এবং $\frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta = 2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2a \sin \theta/2 \cdot \cos \theta/2}{2a \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

6. যদি $x^y = y^x$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log y - y)}{x(y \log x - x)}$

উত্তর ঃ—

এখানে $y \log_e x = x \log_e y$

$$\therefore \quad 1 \cdot \frac{1}{x} + (\log x)\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} + \log y.$$

[উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয়]

অথবা $\left(\log x - \frac{x}{y}\right)\frac{dx}{dy} = \left(\log y - \frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log y - y)}{x(y \log x - x)}.$$

7. যদি $y = \tan^{-1}\frac{a+x}{1-ax}$ হয় দেখাও $\frac{dy}{dx} = (1+x^2)^{-1}$

উত্তর ঃ—

$$y = \tan^{-1}\frac{a+x}{1-ax} = \tan^{-1} a + \tan^{-1} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} a) + \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$= 0 + \frac{1}{1+x^2}, \text{ (যেহেতু } a \text{ ধ্রুবক)}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

8. যদি $\sin y = x \sin(a+y)$ হয়, দেখাও $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

উত্তর ঃ—

এখানে $x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\cos y \sin(a+y) - \cos(a+y) \sin y}{\{\sin(a+y)\}^2} = \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

9. যদি $y = \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x}$ হয়, দেখাও $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$

উত্তর ঃ—

এখানে $y=\dfrac{(1-\cos x)+\sin x}{(1+\cos x)+\sin x}=\dfrac{2\sin x/2(\sin x/2+\cos x/2)}{2\cos x/2(\sin x/2+\cos x/2)}$

$=\tan x/2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{1+\cos x}$$

10. যদি $y=x^{\sin^{-1}x}$ হয়, তবে $\dfrac{d}{d(\sin^{-1}x)}y$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ—

মনে করি $z=\sin^{-1}x$

এখন $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dz}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\Big/\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$

যেহেতু $y=x^{\sin^{-1}x}$,

$$\log y=\sin^{-1}x\cdot\log x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=y\left\{(\sin^{-1}x)\frac{1}{x}+\log x\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\right\}$$

$$=x^{\sin^{-1}x}\left[\frac{\sin^{-1}x}{x}+\frac{\log x}{\sqrt{(1-x^2)}}\right]$$

পুনরায় $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dz}=x^{\sin^{-1}x}\left[\log x+\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}\sin^{-1}x\right]$$

11. যদি $y=\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ এবং $x=\sec^{-1}\dfrac{1}{2t^2-1}$ হয়,

তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}.$$

উত্তর ঃ—

এখানে $y=\tan^{-1}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}=\sin^{-1}t$;

$$2y=2\sin^{-1}t=\sin^{-1}(2t\sqrt{1-t^2}).$$

$$x = \sec^{-1}\frac{1}{2t^2-1} = \cos^{-1}(2t^2-1) = \sin^{-1}(2t\sqrt{1-t^2})$$

$$\therefore \quad 2y = x$$

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}$.

12. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ

উভয় পক্ষের x সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3a\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

অথবা $3x^2dx + 3y^2dy - 3aydx - 3axdy = 0$

অথবা $3(x^2 - ay)dx = 3(ax - y^2)dy$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

বিবিধ অনুশীলনী 5

1. $\dfrac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক অর্থ নির্ধারণ কর।

$x^2 + 6xy + 25y^2 = 16$ বক্ররেখার উপর দুইটি বিন্দু নির্ণয় কর যেখানে উহার স্পর্শক y অক্ষের সমান্তরাল। [উত্তর $(-25, 3)$, $(-1, \frac{3}{25})$]

2. কোন ফাংশন $f(x)$ যদি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয়, উহা ঐ বিন্দুতে অন্তরকলন-যোগ্য নাও হতে পারে—এই উক্তিটি একটি উদাহরণ দিয়া ব্যাখ্যা কর।

3. প্রমাণ কর যে $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর সীমাবদ্ধ মান বিশিষ্ট এবং নির্দিষ্ট অন্তরকলজ থাকলে $f(x)$ উক্ত বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

4. $y = f(x)$ হলে, $\dfrac{dy}{dx}$ এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নগুলির সঙ্গে ফাংশনের প্রকৃতির কি সম্পর্ক তাহা পরিষ্কার ভাবে বুঝিয়ে লেখ।

দেখাও যে $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ররেখার $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষ-রেখার ধনাত্মক দিকের সহিত স্থূলকোণে নত হয়েছে।

5. $x=c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজের সংজ্ঞা নির্ণয় কর এবং সংজ্ঞানুসারে $x=\pi/4$ বিন্দুতে $\sec x$ এর অন্তরকলজ বাহির কর। [উত্তর $\sqrt{2}$]

6. যদি

$$f(x)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2x}{\pi}\tan^{-1}\frac{2}{t^2}\right)$$

হয়, $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজের অস্তিত্বের পরীক্ষা কর।

7. প্রাথমিক তত্ত্ব থেকে $\operatorname{cosec} x$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

8. যদি $x=a\cos^3\theta$ এবং $y=a\sin^3\theta$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=-\tan\theta.$$

9. প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx}=1$, যদি $y=\cos^{-1}\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ এবং $x=\tan^{-1}\dfrac{2z}{1-z^2}$ হয়,

[সঙ্কেত : $y=\cos^{-1}\dfrac{1-z^2}{1+z^2}=2\tan^{-1}z=\tan^{-1}\dfrac{2z}{1-z^2}=x$]

10. যদি $x^y+y^x=a^b$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$$

11. প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$, যদি $\tan y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

12. প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3}{2}$, যদি $y=\sin^{-1}(3t-4t^3)$ এবং $x=\sec^{-1}\dfrac{1}{1-2t^2}$ হয়।

13. যদি $y=\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{a^2-x^2}.$$

14. যদি $y=\cot x+\operatorname{cosec} x$ হয়, দেখাও যে

$$\sin x\frac{dy}{dx}+y=0$$

15. দেখাও যে $f(x)=|x|$, $x=0$ বিন্দুতে সন্তত, কিন্তু উহা $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য নয়।

16. $y = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \log (x + \sqrt{x^2+a^2})$ হয়,

তবে প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{x^2+a^2}$

17. যদি $y = 2\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-1}{x}\right]$ হয়, দেখাও যে $y = \tan^{-1}x$

এবং এখন প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}$;

দেখাও যে $\dfrac{d}{d(\tan^{-1} x)}y = 1$

[সংকেত : মনে কর $x = \tan\theta$, তাহলে $y = \theta$]

18. যদি $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ হয়, তবে দেখাও

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

19. যদি $x^{\log y} = \log x$, দেখাও যে

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1-\log x \log y}{(\log x)^2}$$

20. যদি $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও

$$\frac{x + y\dfrac{dy}{dx}}{x\dfrac{dy}{dx} - y} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.$$

21. প্রমাণ কর $\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$, যদি $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ এবং $x = \cos^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}$ হয়।

22. সংজ্ঞা থেকে নিম্নলিখিত অভেদগুলি প্রতিপাদন কর :—

(i) $f'(0) = 1$, যখন $f(x) = e^x \sin x$.

(ii) $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, যখন $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

23. যদি $f(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{a+b+2x}$ হয় তবে দেখাও যে

$$f'(0) = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}\left(2\log\frac{a}{b} + \frac{b^2-a^2}{ab}\right)$$

24. যদি $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ \phi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$ হয়,

তবে প্রমাণ কর

$$\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ \phi(x) & \psi(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ \phi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$$

25. যদি $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ এবং $s = 4\pi r^2$, তবে প্রমাণ কর

$$\frac{dv}{dr} = s$$

উপরোক্ত অন্তরকলজ সমীকরণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা কর।

26. যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

27. দেখাও যে

$$\frac{d}{dx}(l^n x) = 1/(x.lx.l^2x \cdots\cdots l^{n-1}x),$$

যেখানে $lx = \log x$, $l^2 x = \log \log x$, ইত্যাদি।

28. যদি $x = 2t + 3t^2$ এবং $y = t^2 + 2t^3$ হয়, তবে দেখাও

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

29. যদি $f(x) = |x| + |x - 1|$ হয়, তবে এই ফাংশনের $x = 0$ এবং $x = 1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা এবং অন্তরকলজের অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

30. যদি $y^2 = 4ax$ কে লেখা হয় $x = at^2$ এবং $y = 2at$, তবে দেখাও $\frac{dy}{dx} = t^{-1}$. অন্তরকলজের এই সমীকরণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

31. যদি $f(x) = 2 + x,\ x \geqslant 0$
$= 2 - x,\ x < 0$

হয়, তবে $f(x)$ এর $x = 0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব পরীক্ষা কর।

32. যদি

$$y = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x) \\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \end{vmatrix}$$

হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

33. নিম্নলিখিত বাক্যগুলির সত্যতা প্রমাণ কর ঃ

(1) যুগ্ম ফাংশনের অন্তরকলজ একটি অযুগ্ম ফাংশন হবে।

(2) অযুগ্ম ফাংশনের অন্তরকলজ একটি যুগ্ম ফাংশন হবে।

(3) পর্যাবৃত্ত ফাংশনের অন্তরকলজ একটি পর্যাবৃত্ত ফাংশন হবে।

34. প্রাথমিক তত্ত্ব থেকে $e^{\sin x}$ এর অন্তরকলজ বাহির কর। x এর কোন্ কোন্ মানের জন্য অন্তরকলজের মান শূন্য ? $\left[\text{উত্তর } x=(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$ দ্বিতীয় অংশের জ্যামিতিক তাৎপর্য কি ?

35. যদি $x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}$ এবং $y=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{dy}{dx}$ এর মান t-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

36. যদি $y=\tan x^{\circ}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $180\,dy=\pi\sec^2 x^{\circ}\,dx$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

ক্রমিক অন্তরকলন

6.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

পঞ্চম অধ্যায়ে আমরা একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজ বা বিভেদক সহগ সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। আমরা লক্ষ্য করেছি $f(x)$ ফাংশনের অন্তরকলজ বা বিভেদক সহগ সাধারণতঃ x এর একটি ফাংশন। এখন এই বিভেদক সহগ যদি পুনরায় অন্তরকলনযোগ্য হয় তবে বিভেদক সহগের বিভেদক সহগ $f(x)$ এর দ্বিতীয় বিভেদক সহগ নামে পরিচিত। আবার যদি দ্বিতীয় বিভেদক সহগ অন্তরকলনযোগ্য হয় তাহলে আমরা অনুরূপভাবে $f(x)$ এর তৃতীয় বিভেদক সহগ পাই। এইভাবে $f(x)$ এর ক্রমিক বা উত্তরোত্তর অন্তরকলনের কথা ভাবা যেতে পারে। এই অধ্যায়ে আমরা এই ক্রমিক অন্তরকলনের কথা বিশদভাবে আলোচনা করবো। ক্রমিক অন্তরকলনের প্রয়োজনীয়তা পরবর্তী অধ্যায়ে দেখা যাবে—যেমন কোন ফাংশনের প্রসারের (expansion) জন্য বা অন্তরকল-সমীকরণের (differential equation) জন্য। ক্রমিক অন্তরকলনের নিয়মগুলি এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। এই নিয়মগুলির মধ্যে দুইটি নিয়ম কলনবিদ্যায় সুপরিচিত—(১) লাইবনিজের নিয়ম : এই নিয়মের সাহায্যে দুইটি ফাংশনের গুণফল ফাংশনকে ক্রমিক অন্তরকলনের ফলে যে ফাংশন হবে তা সহজে লেখা যাবে ; (২) ইভানফের নিয়ম : এই নিয়মের সাহায্যে দুইটি ফাংশনের অনুপাত ফাংসনকে ক্রমিক অন্তরকলনের সাহায্যে যে ফাংশন হবে তা সহজে লেখা যাবে।

6.02 ক্রমিক অন্তরকলনের মূলকথা :

যদি একটি ফাংশন $f(x)$ কোন এক অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f(x)$ এর অন্তরকলজ $f'(x)$ সাধারণতঃ x এর একটি ফাংশন। এখন $f'(x) \equiv \phi(x)$ ফাংসনটি অন্তরকলনযোগ্য হলে $\phi(x)$ এর অন্তরকলজকে $f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকলজ বলা হবে। $f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকলজকে নিম্নলিখিত যে কোন একটি প্রতীক চিহ্নের দ্বারা লেখা হয় :

$$f''(x),\ f_2(x),\ f^{(2)}(x),\ \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x),\ D^2 f(x)\ ;$$

অতএব সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই

(1) $$f''(x)=\phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

স্পষ্টতই $f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকলজের অস্তিত্ব $f(x)$ এর প্রথম অন্তরকলজের অস্তিত্ব নির্দেশ করে এবং সেইসঙ্গে $f'(x)$ এর অন্তরকলনীয়তা এবং অবিচ্ছিন্নতার প্রকৃতি নির্দেশ করে।

এইভাবে উত্তরোত্তর অন্তরকলনের ধারণা থেকে আমবা $f(x)$ এর n-তম অন্তরকলজের অস্তিত্ব মনে করতে পারি যদিও n-তম অন্তরকলজের ($f_n(x)$ এর) অস্তিত্বের জন্য নিম্নলিখিত সীমার অস্তিত্ব প্রয়োজন

(2) $$\lim_{h\to 0}\frac{f_{n-1}(x+h)-f_{n-1}(x)}{h},$$

যেখানে $f_{n-1}(x)=\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n-1}f(x)$.

অতএব যদি কোন এক অন্তরালে $f_n(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে নিম্নলিখিত ক্রমিক অন্তরকলজগুলি

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\cdots f_{n-1}(x)$$

সেই অন্তরালে বিদ্যমান থাকবে এবং উপরোক্ত $(n-1)$ – অন্তরকলজগুলি অন্তরকলনযোগ্য হবে, সুতরাং ঐ $(n-1)$ – অন্তরকলজগুলি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হবে।

উদাহরণ : 1. যদি $f(x)=5x^4$ হয়, তবে

$$f'(x)=20x^3$$
$$f'(x)=60x^2$$
$$f'''(x)=120x$$
$$f^{iv}(x)=120$$
$$f^{v}(x)=f^{vi}(x)=\cdots\cdots=0$$

2. যদি $f(x)=e^{5x}$ হয় তবে,

$$f'(x)=5e^{5x}$$
$$f''(x)=5^2e^{5x}$$
$$f'''(x)=5^3e^{5x}$$

ইত্যাদি।

3. যদি $f(x)=\sin x$ হয়, তবে

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{iv}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$$

ইত্যাদি।

যদি $y=f(x)$ হয়, তবে আমরা $f(x)$ এর অন্তরকলের সংজ্ঞা থেকে জানি

$$dy=f'(x)\,dx \qquad \cdots \quad (3)$$

$f(x)$ এর দ্বিতীয় অন্তরকল $d(dy)\equiv d^2y$; এখন তাহলে আমরা পাই

$$d^2y=[f'(x)dx]'\,dx$$

এখানে মনে রাখতে হবে $f'(x)$ ফাংশন x এর উপর নির্ভরশীল, কিন্তু dx নিরপেক্ষ চল অর্থাৎ x এর পরিবর্তন, সুতরাং dx নিরপেক্ষ চলের উপর নির্ভরশীল নয়।

$$\therefore \quad d^2y=dx[f'(x)]'\,dx$$

$$=f''(x)\,(dx)^2$$

$(dx)^2$ এর স্থলে dx^2 লিখিলে আমরা পাই

$$d^2y=f''(x)\,dx^2 \qquad \cdots \quad (4)$$

এইভাবে $$d^3y=f'''(x)\,dx^3 \qquad \cdots \quad (5)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n \qquad \cdots \quad (6)$$

ক্রমিক অন্তরকলের এই ধারণা থেকে আমরা লিখতে পারি

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\ f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}, \qquad \cdots \quad (7)$$

মনে রাখতে হবে, (3)—(7) তখনই ঠিক যখন x একটি নিরপেক্ষ চল।

6.03 ক্রমিক অন্তরকলনের নিয়ম

(1) $D^n\{f(x)\pm g(x)\}=D^n f(x)\pm D^n g(x)$

কারণ আমরা জানি

$$D\{f(x)\pm g(x)\}=Df(x)\pm Dg(x)$$

এখন $D^2\{f(x)\pm g(x)\}=D[D\{f(x)\pm g(x)\}]$

$$=D[Df(x)\pm Dg(x)]$$
$$=D(Df(x))\pm D(Dg(x)]$$
$$=D^2f(x)\pm D^2g(x)$$

মনে করা যাক $D^m\{f(x)\pm g(x)\}=D^mf(x)\pm D^mg(x)$ ... (i)

এখানে $D^{m+1}\{f(x)\pm g(x)\}=D[D^m\{f(x)\pm g(x)\}]$

$$=D[D^mf(x)\pm D^mg(x)],\quad \text{[(i) এর দ্বারা]}$$
$$=D[D^mf(x)]\pm D[D^mg(x)]$$
$$=D^{m+1}f(x)\pm D^{m+1}g(x)$$

অতএব নিয়ম (1) যখনই $n=m$ এ সত্য তখনই উহা $n=(m+1)$ এ সত্য, আবার নিয়ম (1) $n=1$ এ সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ নীতির সাহায্যে নিয়মটি n এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য সত্য।

উদাহরণ : দেখাও যে

$$D^n \sin x=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) \text{ এবং } D^n \cos x=\cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right)$$

অতএব প্রমাণ কর

$$D^n(\sin x\pm\cos x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)\pm\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

সমাধান।

যখন $n=1$, আমরা দেখি

$$D\sin x=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

এখন মনে করা যাক

$$D^m\sin x=\sin\left(m\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$\therefore\quad D^{m+1}\sin x=D(D^m\sin x)=D\sin\left(m\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$=\cos\left(m\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left\{(m+1)\frac{\pi}{2}+x\right\}$$

সুতরাং গাণিতিক আরোহ নীতির সাহায্যে আমরা পাই

$$D^n\sin x=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$$

অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে $D^n \cos x = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$

পরিশেষে নিয়ম (1) অনুসারে

$$D^n(\sin x \pm \cos x) = D^n \sin x \pm D^n \cos x$$

$$= \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) \pm \cos\left(\frac{n\pi}{2} \pm x\right)$$

মন্তব্য। অনুরূপভাবে দেখানো যাইতে পারে

$$D^n \sin(ax+b) = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$$

$$D^n \cos(ax+b) = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right);$$

যেখানে a এবং b দুইটি ধ্রুবক।

(2) লাইবনিজের নিয়ম (বা উপপাদ্য)

যদি u এবং v নিরপেক্ষ চলদ্বয় x এর ফাংশন হয় এবং উভয়ই n-বার অন্তরকলন-যোগ্য হয়, তবে

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (u \cdot v) = (u \cdot v)_n$$

$$= u_n v + {}^nc_1\, u_{n-1} v_1 + {}^nc_2 u_{n-2} v_2 + \cdots\cdots$$

$$+ {}^nc_r u_{n-r} v_r + \cdots\cdots + u v_n$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_{n-r}\, v_r$$

যেখানে $u_0 = u,\ v_0 = v$ এবং $\binom{n}{r} = {}^nc_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

প্রমাণ :

লাইবনিজের উপপাদ্যে $n = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$(u \cdot v)_1 = u_1 v_0 + u_0 v_1$$

$$= u_1 v + u v_1 \qquad \text{(i)}$$

পুনরায় অন্তরকলনের নিয়মানুসারে আমরা জানি

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u'v + uv' \qquad \text{(ii)}$$

অর্থাৎ $(u \cdot v)_1 = u_1 v + u v_1$ (যেখানে $u_1 \equiv u' = \dfrac{du}{dx}$, ইত্যাদি)

(i) এবং (ii) থেকে সহজেই দেখা যায় লাইবনিজের উপপাদ্য $n=1$ এ সত্য।

এখন মনে করা যাক উপপাদ্যটি $n=m$ এ সত্য অর্থাৎ

$$(u \cdot v)_m = u_m v + \binom{m}{1} u_{m-1}\ v_1 + \binom{m}{2} u_{m-2}\ v_2 + \cdots\cdots$$

$$+ \binom{m}{r} u_{m-r} v_r + \cdots\cdots + u v_m \qquad \text{(iii)}$$

(iii) এর উভয় পক্ষের x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করে পাওয়া যায়

$$(uv)_{m+1} = u_{m+1} v + \left[1 + \binom{m}{1} \right] u_m v_1$$

$$+ \left[\binom{m}{1} + \binom{m}{2} \right] u_{m-1} v_2 + \cdots$$

$$+ \left[\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} \right] u_{m-r+1} v_r$$

$$+ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots + u v_{m+1}$$

$$= u_{m+1} \cdot v + \binom{m+1}{1} u_m v_1 + \binom{m+1}{2} u_{m-1} v_2 + \cdots$$

$$+ \binom{m+1}{r} u_{m+1-r}\ v_r + \cdots + u v_{m+1} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

(iii) এবং (iv) থেকে স্পষ্টতঃই দেখা যায় যে যখনই উপপাদ্যটি $n=m$ এর জন্য সত্য হয়, তখনই উহা $n=m+1$ এর জন্য সত্য হবে। বিশেষভাবে উপপাদ্যটি $n=1$ এর ক্ষেত্রে সত্য। অতএব গাণিতিক আরোহ-নীতির সাহায্যে প্রমাণিত হয় যে উপপাদ্যটি n এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য সত্য।

উদাহরণ ঃ

1. যদি $y = e^{ax} x^2$ হয়, তবে y এর n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ মনে কর $u = e^{ax}$ এবং $v = x^2$

এখন লাইবনিজের উপপাদ্য অনুসারে আমরা জানি

$$(u.v)_n = u_n v + \binom{n}{1} u_{n-1} v_1 + \binom{n}{2} u_{n-2} v_2 + \cdots + u v_n$$

এখানে $u_1 = ae^{ax},\ u_2 = a^2 e^{ax},\ u_3 = a^3 e^{ax},\ \cdots u_n = a^n e^{ax}$

এবং $v_1 = 2x,\quad v_2 = 2,\quad v_3 = v_4 = \cdots = 0$

$$\therefore\quad (e^{ax}.\ x^2)_n = a^n e^{ax}.x^2 + na^{n-1} e^{ax}.\ 2x + \frac{n(n-1)}{2\,!} a^{n-2} e^{ax}.2$$

$$= a^n e^{ax} x^2 + 2na^{n-1} e^{ax}.x + n(n-1) a^{n-2} e^{ax}$$

$$= e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1} x + n(n-1) a^{n-2}]$$

2. যদি $y=\tan^{-1}x$, তবে দেখাও যে

$$(1+x^2)y_2+2xy_1=0\;;$$

এখন নিম্নলিখিত সমতাটি প্রমাণ কর ঃ—

$$(1+x^2)y_{n+2}+2(n+1)xy_{n+1}+n(n+1)y_n=0$$

উত্তর ঃ—

এখানে $y_1=\dfrac{1}{1+x^2}$

$$\therefore\quad (1+x^2)y_1=1$$

উভয়পক্ষের x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$(1+x^2)y_2+2xy_1=0 \qquad \ldots \quad \text{(i)}$$

এখন লাইবনিজের উপপাদ্যের সাহায্যে (i) এর উভয় পক্ষের অন্তরকলজ নির্ণয় করলে দেখা যায়

$$y_{n+2}\,(1+x^2)+2nxy_{n+1}+n(n-1)y_n+2[xy_{n+1}+ny_n]=0$$

অথবা $(1+x^2)y_{n+2}+2(n+1)xy_{n+1}+n(n+1)y_n=0$

3. যদি $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ হয়, তবে প্রমাণ কর ঃ—

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}+(m^2-n^2)y_n=0$$

উত্তর ঃ—

এখানে $y_1=\cos(m\sin^{-1}x)\,\dfrac{m}{\sqrt{(1-x^2)}}$

অথবা $\sqrt{(1-x^2)}\,.\,y_1=m\cos(m\sin^{-1}x)$

উপরোক্ত সমীকরণের উভয় পক্ষের অন্তরকলজ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$\sqrt{(1-x^2)}.y_2-\frac{xy_1}{\sqrt{(1-x^2)}}=-\sin(m\sin^{-1}x).\frac{m^2}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

অথবা $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2\sin(m\sin^{-1}x)=0$

অথবা $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2y=0 \qquad (\because\; y=\sin(m\sin^{-1}x)$

শেষের সমীকরণের উভয় পক্ষের n-তম অন্তরকলজ (লাইবনিজের উপপাদ্য প্রয়োগে) নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$y_{n+2}.\,(1-x^2)-2nxy_{n+1}+n(n-1)y_n+[y_{n+1}\,.\,x+ny_n]+m^2y_n=0$$

অথবা $(1-x^2)\,y_{n+2}-(2n+1)\,xy_{n+1}+(m^2-n^2)\,y_n=0$

4. যদি $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, তবে দেখাও যে

$$x^2y_2 + xy_1 + y = 0\ ;$$

সমীকরণটিকে লাইবণিজের উপপাদ্য অনুযায়ী n বার অন্তরকলন করে প্রমাণ কর

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)\,xy_{n+1} + (n^2+1)\,y_n = 0$$

উত্তর :—

এখানে $y_1 = -\dfrac{a}{x}\sin(\log x) + \dfrac{b}{x}\cos(\log x)$

$\therefore\quad xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$

উভয়পক্ষের অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$xy_2 + y_1 = -\frac{a}{x}\cos(\log x) - \frac{b}{x}\sin(\log x)$$

অথবা $x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$

অথবা $x^2y_2 + xy_1 = -y$

$\therefore\quad x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (প্রমাণিত)

এখন লইবনিজের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$y_{n+2}x^2 + 2nx\,y_{n+1} + n(n-1)y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

অথবা $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ [প্রমাণিত]।

5. যদি $y = \tan^{-1}x$, তবে $\left[\dfrac{d^ny}{dx^n}\right]_{x=0}$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর :—

উদাহরণ 2 থেকে আমরা জানি

$$(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

এখন উপরোক্ত অভেদে $x = 0$ বসিয়ে এবং $[y_n]_{x=0}$ এর পরিবর্তে $(y_n)_0$ লিখলে পাওয়া যায়

$$(y_{n+2})_0 = -n(n+1)(y_n)_0$$

অর্থাৎ $(y_n)_0 = -(n-2)(n-1)(y_{n-2})_0 \qquad \cdots \quad \text{(i)}$

এখন মনে কর $n = 2m$ (যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা)। তাহলে আমরা পাই

$$(y_{2m})_0 = -(2m-2)(2m-1)(y_{2m-2})_0$$

$$= (-1)^2(2m-1)(2m-2)(2m-3)(2m-4)(y_{2m-4})_0$$

[(i) এর পুনঃ প্রয়োগে]

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (-1)^{m-1}(2m-1)(2m-2)\cdots\cdots 3\cdot2\,(y_2)_0$$

যেহেতু $(1+x^2)\, y_2+2xy_1=0$, সেহেতু $(y_2)_0=0$

$$\therefore\quad (y_{2m})_0=0 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

পুনরায় মনে কর $n=2m+1$ (বিযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা)। তাহলে আমরা পাই

$$(y_{2m+1})_0=(-1)^2(2m)(2m-1)(2m-2)(2m-3)(y_{2m-3})_0$$

$$= \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$=(-1)^m\, 2m(2m-1)\cdots\cdots 2\cdot 1\ (y_1)_0$$

$$=(-1)^m \,\underline{|2m}\, (y_1)_0$$

যেহেতু $y_1=\dfrac{1}{1+x^2}$, সেহেতু $(y_1)_0=1$

$$\therefore\quad (y_{2m+1})_0=(-1)^m\, \underline{|2m} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এখন (ii) এবং (iii) থেকে আমরা পাই

$$\left[\frac{d^ny}{dx^n}\right]_{x=0}=0, \text{ যখন } n \text{ একটি যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা}$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\underline{|n-1}\,, \text{ যখন } n \text{ একটি বিযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা}$$

মন্তব্য :— $\left[\dfrac{d^ny}{dx^n}\right]_{x=0}$ মানগুলি (যে কোন n এর জন্য) ফাংশনের বিস্তৃতির ক্ষেত্রে বিশেষ প্রয়োজনীয়। পরবর্তী অধ্যায়ে যখন ম্যাক্লরিণের উপপাদ্য আলোচনা করা হবে তখন এই মানগুলির প্রয়োজন হবে।

(3) ইভানফের উপপাদ্য

যদি $w(x)$, x এর একটি ফাংশন এমন হয় যে $w(x)=\dfrac{u(v)}{v(x)}\equiv\dfrac{u}{v}$,

এবং $u(x)$ ও $v(x)$ যদি n-বার অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{u}{v}\right)\equiv\left(\frac{u}{v}\right)_n$$

$$(*)\qquad =\frac{1}{v^{n+1}}\begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \cdots & 0 & u \\ v_1 & v & 0 & \cdots & 0 & u_1 \\ v_2 & 2v_1 & v & \cdots & 0 & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_n & \binom{n}{1}v_{n-1} & \binom{n}{2}v_{n-2} & & \binom{n}{1}v_1^{n} & u_n \end{vmatrix}$$

প্রমাণ :—

$$\because \quad w(x)=\frac{u}{v}, \quad \therefore \quad vw=u$$

এখন u এর ক্রমিক অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$\begin{cases} vw \equiv (vw)_0 = u \\ v_1 w + v w_1 = u_1 \\ v_2 w + 2v_1 w_1 + v w_2 = u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n w + \binom{n}{1} v_{n-1} w_1 + \cdots + \binom{n}{r} v_{n-1} w_r + \cdots + v w_n = u_n \end{cases}$$

উপরোক্ত সমীকরণগুলী সমাধান করলে (উচ্চ বীজগণিত দেখ) (*) পাওয়া যায়।

উদাহরণ : $y=\tan x$ এর n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

এখানে $w(x)=\tan x=\frac{\sin}{\cos x}\equiv\frac{u(x)}{v(x)}$

আমরা জানি $(u(x))_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$ এবং $(v(x))_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

অতএব ইভানফের উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা পাই

$$\cos^{n+1}x\cdot\frac{d^n y}{dx^n}=\begin{vmatrix} \cos x & 0 & & & \sin x \\ \cos(\pi/2+x) & \cos x & 0 & \cdots & \cdots \sin(\pi/2+x) \\ \cos\left(2\frac{\pi}{2}+x\right) & 2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) & \cdots & & \cdots \sin\left(2\frac{\pi}{2}+x\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\left(n\frac{\pi}{2}+x\right) & n\cos\left((n-1)\frac{\pi}{2}+x\right) & \cdots & & \sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right) \end{vmatrix}$$

6.04 বিশেষ উদাহরণ :—

আমরা এই অনুচ্ছেদে কতকগুলি বিশেষ ধরণের উদাহরণ আলোচনা করবো।

1. মনে কর $y=e^{ax}\sin bx$

এখানে $y_1=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

$$=re^{ax}(\sin bx\cos\theta+\cos bx\sin\theta)$$

[$a=r\cos\theta$ এবং $b=r\sin\theta$ মনে করিয়া]

$$=re^{ax}\sin(bx+\theta)$$

এখন লক্ষ্য করা যায়

$$a^2+b^2=r^2 \text{ এবং } \tan\theta=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\quad y_1=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\,e^{ax}\sin\left(bx+\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\qquad\cdots\quad\text{(i)}$$

এখন ধরা যাক

$$y_m\equiv(y)_m=(a^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\;e^{ax}\sin\left((bx+m\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\qquad\cdots\quad\text{(ii)}$$

সহজেই লক্ষ্য করা যায় যখন $m=1$, তখন (i) এবং (ii) একই সমতা।

তাহলে $\quad y_{m+1}=\dfrac{d}{dx}(y_m)$

$$=(a^2+b^2)^{(m+1)/2}\;re^{ax}\sin\left(bx+m\tan^{-1}\frac{b}{a}+\theta\right)$$

[যেখানে $a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$]

$$=(a^2+b^2)^{(m+1)/2}\;e^{ax}\sin\left(bx+(m+1)\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

সুতরাং গাণিতিক আরোহ নীতি অনুসারে আমরা পাই

$$y_n=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,e^{ax}\sin\left(bx+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

মন্তব্য :—(i) উদাহরণ 1এর সামান্যীকরণের ফলে পাওয়া যায়

$$D^n\{e^{ax}\sin(bx+c)\}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,e^{ax}\sin\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

(ii) অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে

$$D^n\{e^{ax}\cos bx\}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,e^{ax}\cos\left(bx+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

এবং $\quad D^n\{e^{ax}\cos(bx+c)\}$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\,e^{ax}\cos\left(bx+c+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

2. সহজেই ক্রমিক অন্তরকলনের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়

(i) $D^n(x^m)=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

(ii) $D^n(e^{ax})=a^ne^{ax}$

(iii) $D^n\{(x+a)^{-1}\}=\dfrac{(-1)^n\;n!}{(x+a)^{n+1}}$

(iv) $D^n\{\log(x+a)\}=(-1)^{n-1}(n-1)!/(x+a)^n$

3. অনেক সময় 'র‍্যাসানাল' (Rational) ফাংশনের n-তম অন্তরকলজ নির্ণয় করার সময় ফাংশনটিকে **আংশিক ভগ্নাংশে** (partial fraction) পরিণত করলে নির্ণয়পদ্ধতি খুব সহজ হয়। সেজন্য এরূপ ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করার নিয়মগুলি সংক্ষেপে আলোচনা করে নিয়ে ক্রমিক অন্তরকলনের কথা বলা হবে।

আংশিক ভগ্নাংশ-সম্পাদন করার নিয়ম :—

প্রথমে মনে রাখতে হবে এই নিয়মগুলি প্রয়োগ করার আগে এরূপ ফাংশনের লবের মাত্রা (degree) হরের মাত্রার চেয়ে কম হওয়া দরকার। যদি কম না হয় তবে সাধারণ ভাগের সাহায্যে এরূপ করা সম্ভবপর হয়। উদাহরণস্বরূপ মনে কর

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)};$$

এখানে ভাগ-প্রক্রিয়ার সাহায্যে পাই

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}=(x+3)+\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$$

এখন $(7x-6)$ এর মাত্রা $\{(x-1)(x-2)\}$ এর মাত্রার চেয়ে কম।

অতএব $\dfrac{7x-6}{(x-1)(x-2)}$ এই ভগ্নাংশের ক্ষেত্রেই আংশিক ভগ্নাংশের নিয়ম প্রযোজ্য।

নিয়ম 1. যদি ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলি একরেখ (linear) এবং অ-পুনরাবৃত্ত (non-repeated) হয়, তবে প্রত্যেক এরূপ উৎপাদকের (যথা : $x-a$-এর) জন্য আংশিক ভগ্নাংশ থাকবে

$$\frac{A}{x-a},$$

যেখানে A একটি ধ্রুবক।

উদাহরণস্বরূপ :

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\therefore \quad 7x-6=A(x-2)+B(x-1)$$

$x=1$ ধরলে পাওয়া যায় $A=-1$

আবার $x=2$ ধরলে পাওয়া যায় $B=8$

$$\therefore \quad \frac{7x-6}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{8}{x-2}$$

এখন $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{\frac{7x-3}{(x-1)(x-2)}\right\} = -\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-1)^{-1} + 8\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-2)^{-1}$

বিশেষ উদাহরণ 2এর (iii) এর সাহায্যে দক্ষিণ পক্ষ সহজেই নির্ণয় করা যেতে পারে।

নিয়ম 2. যদি হরের উৎপাদকগুলি একরেখ হয় এবং কতকগুলি পুনরাবৃত্ত হয় তবে প্রত্যেক পুনরাবৃত্ত উৎপাদকের (যথা $(x-a)^3$এর) জন্য আংশিক ভগ্নাংশ থাকবে

$$\frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)},$$

যেখানে A, B, C সবই ধ্রুবক।

উদাহরণস্বরূপ ঃ—

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)}$$

$$\therefore \quad 1 = A(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)^2$$

এখন x এর ইচ্ছামত মান বসিয়ে বা উভয়পক্ষের x এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ তুলনা করলে A, B, C এর মানগুলি নির্ণয় করা যেতে পারে।

আবার $$\frac{4x}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$

আরও নিয়মগুলি এখানে আর আলোচনার দরকার নেই। যেমন যদি হরের উৎপাদক একরেখ না হয় তবে অন্তরকলনের বিশেষ সুবিধা হয় না। এই নিয়মগুলি কিন্তু সমাকলন-বিদ্যায় দরকার, সেজন্য এই বাকী নিয়মগুলি সমাকলন-বিদ্যায় আলোচনা করা হবে।

বিশেষ উদাহরণ ঃ মনে কর $y = \frac{1}{x^2+a^2}$

তাহলে দেখা যায়

$$y = \frac{1}{(x+ia)(x-ia)}, \text{ যেখানে } i = \sqrt{-1}$$

[i সংখ্যাটি বাস্তব সংখ্যা নয়, ইহা একটি জটিল সংখ্যা (complex number)] ia সংখ্যাটি ধ্রুবক হওয়ায় আমরা কলনবিদ্যার নিয়মগুলি এখানে প্রয়োগ করতে পারি।

এখন $D^n y = D^n\left[\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2ia}\left[D^n\left(\frac{1}{x-ia}\right)-D^n\left(\frac{1}{x+ia}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2ia}\left[\frac{1}{(x-ia)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ia)^{n+1}}\right];\ \text{[2(iii)এর সাহায্যে]}$$

এখন মনে কর $x=r\cos\theta$, $a=r\sin\theta$; তাহলে $r^2=x^2+a^2$ এবং $\tan\theta=\frac{a}{x}$;

বীজগণিতের ডি'ময়ভারের উপপাদ্য ($(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$)-এর সাহায্যে আমরা পাই

$$D^n y=\frac{(-1)^n n!}{ar^{n+1}}\sin(n+1)\theta$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{a^{n+2}}\sin^{n+1}\theta\sin(n+1)\theta;\quad [\because a=r\sin\theta]$$

যেখানে $\theta=\tan^{-1}\frac{a}{x}=\cot^{-1}\frac{x}{a}$.

মন্তব্য :—যদি $y=\tan^{-1}x$ হয়, তবে আমরা দেখি

$$y_1=\frac{1}{1+x^2}$$

এখন $D^n(\tan^{-1}x)=D^{n-1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

অতএব উপরোক্ত বিশেষ উদাহরণের সাহায্যে আমরা পাই

$$D^n(\tan^{-1}x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\theta\sin n\theta,$$

যেখানে $\theta=\tan^{-1}\frac{1}{x}=\cot^{-1}x$.

4. মনে কর

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

এখন এই সমীকরণ থেকে ক্রমিক অন্তরকলজ নির্ণয় করা যাক্।

এখানে y চল x চলের একটি ফাংশন; অতএব উভয় পক্ষের x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করলে পাওয়া যায়

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

এখন $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + x\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}}{y^2} \qquad \left[\frac{dy}{dx} \text{ এর মান বসিয়ে}\right]$$

$$= -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}$$

$$= -\frac{b^4}{a^2y^3} \qquad [\because a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2]$$

ক্রমিক অন্তরকলনের সাহায্যে আমরা $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$, ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারি।

5. মনে কর $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

সুতরাং $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}\right)$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

এখন $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}\right) = \frac{\dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{d^3x}{dt^3}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$

কিন্তু $\displaystyle \frac{dt}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dt}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt} \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{d^2x}{dt^x}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

উপরোক্ত সমতাটি নিম্নলিখিতভাবে লেখা যেতে পারে :—

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\phi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{[\phi'(t)]^3}.$$

উত্তরোত্তর অন্তরকলনের সাহায্যে $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, ইত্যাদি নির্ণয় করা যেতে পারে।

উদাহরণ : যদি $x=a\cos t$ এবং $y=b\sin t$ হয় তবে

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-b\sin t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}$$

$$=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

বিবিধ অনুশীলনী 6

1. যদি $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{a^2}$$

2. যদি $y=a^x$ হয়, দেখাও $\frac{d^ny}{dx^n}=(\log a)^n\, a^x$

3. যদি $y=e^x\sin x$ হয়, প্রমাণ কর

$$y_2-2y_1+2y=0$$

4. যদি $y^2=4ax$ হয়, দেখাও যে $\frac{d^2y}{dx^2}=-4a^2/y^3$

5. যদি $e^x+x=e^y+y$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$$

6. যদি $x^3+y^3=4axy$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$$

7. যদি $x=a(\theta-\sin\theta)$ এবং $y=a(1-\cos\theta)$ হয়, তবে দেখাও

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

8. যদি $x=a\cos t$ এবং $y=a\sin t$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

9. দেখাও যে

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(\sinh x) = \sinh x$$

এবং $$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(\sinh x) = \cosh x$$

10. যদি $y = x^2 e^{bx}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y_n = e^{bx} b^{n-2} [b^2x^2 + 2bnx + n(n-I)]$$

11. যদি $x = a \cos^3 t$ এবং $y = a \sin^3 t$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3a \sin t$$

12. $y = \sin (a \sin^{-1} x)$ হলে দেখাও যে

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$$

সমীকরণটিকে লাইবনিজের উপপাদ্য অনুযায়ী n-বার অন্তরকলন করে প্রমাণ কর যে

$$\left(\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}\right)_{x=0} = (n^2 - a^2)\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=0}$$

13. যদি $y = e^{ax} \sin bx$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0$$

14. যদি $y = e^{a \sin^{-1} x}$ হয়, প্রমাণ কর

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\, y_{n+1} - (n^2 + a^2)y_n = 0$$

15. যদি $y = \frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y_n = (-1)^n \lfloor n \left[\frac{3}{(x+2)^{n+1}} - \frac{2^n}{(2x-3)^{n+1}}\right]$$

16. যদি $y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে $y_{10}(0)$ এর মান নির্ণয় কর। [উত্তর : 0]

17. যদি $y = \tan^{-1} x$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cos (\pi + 3y) \cos^3 y$$

18. যদি $y = a(1-\cos\theta)$ এবং $x = a(\theta - \sin\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos\theta - 1}$$

19. যদি $y=\frac{x^n}{1+x}$ হয়, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, দেখাও যে

$(1+x)^{n+1}\, y_n$ ফাংশনটি x এর নিরপেক্ষ $\left(y_n \equiv \frac{d^n y}{dx^n}\right)$

20. যদি $y=\frac{x}{1+x^2}$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$y_n=(-1)^n\, n\,!\cos(n+1)\theta\, \sin^{n+1}\theta$, যেখানে $x=\cot\theta$.

21. যদি $y=[\log(x+\sqrt{1+x^2})]^2$ হয় তবে দেখাও যে

(i) $(1+x^2)y_2+xy_1=2$

(ii) $(1-x^2)y_{n+2}+(2n+1)x\,y_{n+1}+n^2\,y_n=0$

22. দেখাও যে

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$$

23. যদি $y=e^{ax}\sin bx$ হয়, তবে দেখাও যে

(i) $y^n=(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}\, e^{ax}\sin\left(bx+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$

(ii) $y_n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}\,e^{ax}\,b^r\sin\left(\frac{r\pi}{2}+bx\right)$

এখন প্রমাণ কর

$$\sin\left(bx+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)=\lambda^{-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b}{a}\right)^r\sin\left(\frac{r\pi}{2}+bx\right);$$

$$\lambda=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

অনুরূপভাবে দেখাও যে

$$\cos\left(bx+n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)=\lambda^{-1}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{b}{a}\right)^r\cos\left(\frac{r\pi}{2}+bx\right)$$

[এস. কে. চ্যাটার্জী ; রেভ. ম্যাট. হিসপ. আমেরিকানা সংখ্যা ২২ (১৯৬২) পাতা ১৭১-১৭৩]

24. যদি $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2}{(hx+by+f)^3}$$

25. প্রমাণ কর

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{x^2/2}\right)=x\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2/2}\right)+n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{x^2/2}\right)$$

এখন $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{x^2/2}\right)=u_n(x)e^{x^2/2}$ হলে (যেখানে $u_n(x)$ n মাত্রার একটি বহুপদ রাশি) দেখাও যে

$$u_{n+1}=x\,u_n+n\,u_{n-1}$$

26. যদি u, v, w রাশিগুলি x এর ফাংশন হয় এবং অন্তরকলনযোগ্য হয় তবে দেখাও

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix}$$

যেখানে $u_n=\frac{d^n u}{dx^n}$, ইত্যাদি।

27. যদি $f''(x)=0$ হয় (যে কোন বাস্তব x এর জন্য) তবে দেখাও যে f একটি রৈখিক ফাংশন।

28. যদি $D^2y=(Dy)^2$ হয়, তবে দেখাও যে

$$D\left(x+\frac{1}{y'}\right)=0$$

$y=\log\frac{1}{x}$ ধরে উপরোক্ত সত্যতা প্রমাণ কর।

29. যদি $f'''(x)=0$ হয় (যে কোন বাস্তব x এর জন্য) তবে $f(x)$ এর আকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা কর।

30. যদি $(Lx+M)/(x^2-2Bx+C)$ এর n-তম অন্তরকলজ U_n হয়, তবে দেখাও

$$\frac{x^2-2Bx+C}{(n+1)(n+2)}\,U_{n+2}+\frac{2(x-B)}{n+1}\,U_{n+1}+U_n=0.$$

31. $y=e^{\cos^{-1}x}$ হলে, y_n, y_{n+1}, y_{n+2} সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর, যেখানে y_m, y এর m-তম অন্তরকলজ নির্দেশ করে। এখন $y_{2n}(0)$ এর মান নির্ণয় কর।

[উত্তর : $(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-(n^2+1)y_n=3$

$y_{2n}(0)=e^{\pi/2}\,(2^2+1^2)(4^2+1^2)\cdots[(2n-2)^2+1^2)]$]

32. যদি $x+y=k$ হয় (k একটি ধ্রুবক) তাহলে লাইবনিজের উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখাও যে

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n y^n) = \lfloor n [y^n - \binom{n}{1}^2 y^{n-1}x + \binom{n}{2}^2 y^{n-2}x^2 - \cdots + (-1)^n x^n]$$

33. যদি $y=(\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)xy_{n+1}-n^2y_n=0$$

উপরোক্ত সমীকরণে $x=0$ বসানো কি যুক্তিসঙ্গত ?

34. যদি $y=\tan x$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$y_n(0)-\binom{n}{2}y_{n-2}(0)+\binom{n}{4}y_{n-4}(0)-\cdots=\sin n\pi/2$$

35. x^{2n} কে দুই পৃথক পদ্ধতিতে n-বার অন্তরকলন করে প্রমাণ কর যে

$$1+\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2 \cdot 2^2}+\cdots\cdots=\frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$ · [সংকেত : $y=x^{2n}=x^n \cdot x^n$]

সপ্তম অধ্যায়

অন্তরকলনীয় ফাংশন সম্বন্ধীয় কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য

7.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

ষষ্ঠ অধ্যায়ে অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের কথা বলা হয়েছে। এখন অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের ক্ষেত্রে কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য আলোচনা করা হবে। এই উপপাদ্যগুলি অন্তরকলনবিদ্যায় খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উপপাদ্যগুলির মধ্যে সবচেয়ে মৌলিক উপপাদ্য রোলের উপপাদ্য (Rolle's theorem)। অপরাপর উপপাদ্য সমূহ রোলের উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা হয়। রোলের উপপাদ্যের পরিণতি হিসাবে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্য (Lagrange's mean value theorem), কসির মধ্যম মান উপপাদ্য (Cauchy's mean value theorem), টেলরের উপপাদ্য (Taylor's theorem), ম্যাক্লরিনের উপপাদ্য (Maclaurin's theorem) বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। কলনবিদ্যায় যে ফাংশনের ক্ষেত্রে টেলরের বা ম্যাক্লরিনের উপপাদ্য প্রযোজ্য সেই ফাংশনকে উচ্চগণিতে বৈশ্লেষিক (analytical) ফাংশন বলে। বৈশ্লেষিক ফাংশনের বিস্তৃতির আলোচনা উচ্চগণিতে খুবই গুরুত্বপূর্ণ। আর একটি উপপাদ্য এই অধ্যায়ে বিশদভাবে আলোচনা করা হবে সেটি সীমা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়—এই উপপাদ্যটি ল'সপিটাল ও বার্ণোলির (L'Hospital-Bernoulli) এর দেওয়া। ল'সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্যের সাহায্যে বিশেষ বিশেষ সীমা নির্ণয় খুব সহজসাধ্য হয়ে ওঠে।

7.02 রোলের উপপাদ্য :

বিবৃতি : যদি একটি ফাংশন $f(x)$, কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্তগুলির দ্বারা সিদ্ধ হয় :

(i) $f(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য

এবং (iii) $f(a)=f(b)$,

তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তত একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে $f'(\xi)=0$ হবে $(a < \xi < b)$।

প্রমাণঃ যেহেতু $f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন, অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্ম থেকে আমরা জানি যে $f(x)$ ঐ অন্তরালে সপ্রান্ত হবে এবং অন্তত একবার ঐ অন্তরালে প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের মান ধারণ করবে। মনে করি লঘিষ্ঠ উচ্চপ্রান্ত $= M$ এবং গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত $= m$; স্বভাবতই $M \leqslant m$.

প্রথম অবস্থা : মনে করি $M = m$.

এই অবস্থায়

$$f(a) = f(x) = f(b) = M = m \; ; \; x \in (a, b)$$

তাহলে $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে একটি ধ্রুবক। ফলে যে কোন বিন্দু $\xi \in (a, b)$ এর জন্য $f'(\xi) = 0$; অতএব প্রথম অবস্থায় উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত।

দ্বিতীয় অবস্থা : মনে করি $M > m$

এই অবস্থায় প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের অন্তত একটি $f(a)$ বা $f(b)$ থেকে ভিন্ন এবং এই প্রান্ত মানটি অন্তরালের প্রান্তদ্বয় a এবং b ছাড়া যে কোন বিন্দুতে (মনে কর ξ তে) $f(x)$ ধারণ করবে, যেহেতু অবিচ্ছিন্ন ফাংশন প্রান্তীয় মান ধারণ করে।

এখন প্রমাণ করা হবে $f'(\xi) = 0$.

সুবিধার জন্য প্রথমে মনে করি $f(\xi) = M$; তাহলে লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্তের সংজ্ঞা থেকে পাই

$$f(\xi + h) \leqslant f(\xi) = M,$$

যেখানে h একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা এবং $\xi + h \in (a, b)$। এখন যদি $h > 0$ হয়, তাহলে

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqslant 0$$

অর্থাৎ $Rf'(\xi) \leqslant 0$ ... ... (i)

আবার যদি $h < 0$ হয়, তাহলে

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geqslant 0$$

$$\therefore \lim_{h \to 0-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geqslant 0$$

অর্থাৎ $Lf'(\xi) \geqslant 0$ ... ... (2)

উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী আমরা লক্ষ্য করি যে $f(x)$ ফাংশনটি (a, b) অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য অর্থাৎ $f(x)$ এর $x=\xi$ বিন্দুতে $(a<\xi<b)$ অন্তরকলজ বিদ্যমান। সুতরাং $Lf'(\xi)$ এবং $Rf'(\xi)$ উভয়ই বিদ্যমান এবং সমান হবেই। (1) এবং (2) থেকে সহজেই অনুমিত হয় $Lf'(\xi)=0$ এবং $Rf'(\xi)=0$ ছাড়া আর কোন গত্যন্তর নাই

$$\therefore \quad L f'(\xi)=0=R f'(\xi)$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad f'(\xi)=0$$

যদি মনে করতাম $f(\xi)=m$, তাহলেও অনুরূপভাবে গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্তের সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করতে পারতাম $f'(\xi)=0$; অতএব উপপাদ্য যে কোন অবস্থায় সিদ্ধ অর্থাৎ $f'(\xi)=0$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ স্পষ্টতই রোলের উপপাদ্য সত্য হবে যখন $f(a)=0=f(b)$। $f(a)$ এবং $f(b)$ এর এই বিশেষ মানের ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি বীজগাণিতিক সমীকরণের ক্ষেত্রে বিশেষভাবে প্রযোজ্য। অর্থাৎ যদি $f(x)$ একটি বহুপদ রাশি হয় তবে $f(x)=0$ সমীকরণের যে কোন দুইটি বীজের মধ্যে $f'(x)=0$ সমীকরণের অন্তত একটি বীজ থাকবেই।

উদাহরণ ঃ মনে কর ঃ

$$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$$

এখানে লক্ষ্য কর $f(x)=0$, যখন $x=0, -1, -2, -3$. অতএব রোলের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত অনুযায়ী $f'(x)=0$ সমীকরণের $(-1, 0)$, $(-2, -1)$ এবং $(-3, -2)$ অন্তরালের প্রত্যেকটিতে একটি করে বীজ থাকবেই। অতএব $f'(x)=0$ সমীকরণের প্রত্যেকটি বীজ বাস্তব সংখ্যা।

মন্তব্য ঃ (1) রোলের উপপাদ্য প্রয়োগ করার সময় লক্ষ্য রাখতে হবে $f(x)$ ফাংশনটি (a, b) অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য কিনা। কারণ মনে করা যাক

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

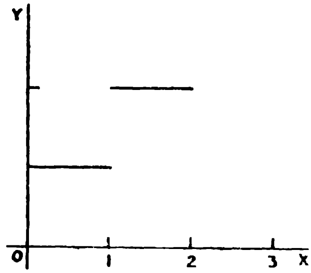
ফাংশনটি $[-1, 1]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরালের প্রান্তবিন্দুদ্বয়তে $f(x)$ এর মান শূন্য অর্থাৎ $f(1)=0=f(-1)$; তথাপি

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$(-1, 1)$ অন্তরালের কোন বিন্দুতে শূন্যমান ধারণ করে না ; কারণ অন্তরালের $x=0$ বিন্দুতে $f'(x)$ বিদ্যমান নয়।

(2) রোলের উপপাদ্যে ফাংশনের উপর আরোপিত সর্তগুলি পর্য্যাপ্ত কিন্তু আবশ্যকীয় নয়। অর্থাৎ কোন ফাংশন রোলের উপপাদ্যের সর্তগুলির দ্বারা সিদ্ধ নয়, অথচ ξ এর অস্তিত্ব বিদ্যমান হতে পারে। কারণ মনে করা যাক

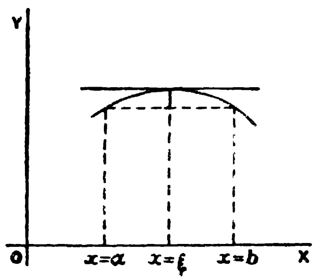
$$f(x)=1, \quad 0 \leqslant x < 1$$
$$=2, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

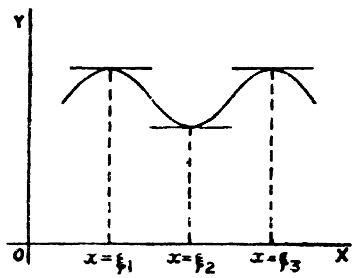


এখানে $f'(\xi)=0, \quad \xi \neq 1, \quad \xi \in (0, 2)$

রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য্য :

যদি $y=f(x)$ এর লেখচিত্রে x এর দুইটি মানের ($x=a$ এবং $x=b$) জন্য কোটির একই মান হয় এবং লেখচিত্রটি $x=a$ থেকে $x=b$ পর্য্যন্ত অবিচ্ছিন্ন হয় এবং যদি লেখচিত্রের প্রতি $x=a$ এবং $x=b$ এর মধ্যে বিন্দুতে স্পর্শক টানা যায়, তাহলে $x=a$ এবং $x=b$ এর মধ্যে অন্তত একটি বিন্দু $x=\xi$ থাকবে যেখানে লেখচিত্রের $(\xi, f(\xi))$ বিন্দুতে স্পর্শক X অক্ষরেখার সমান্তরাল হবে।





7.03 ল্যাগরাঞ্জের (প্রথম) মধ্যম মান উপপাদ্য :

বিবৃতি : যদি একটি ফাংশন $f(x)$, কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্ত দুইটির দ্বারা সিদ্ধ হয় :

(i) $f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য

তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তত এমন একটি বিন্দু ξ থাকবে যেখানে

$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$ হবে ($a<\xi<b$)।

প্রমাণ: প্রথমে $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত একটি সহায়ক ফাংশন (auxiliary function) নিম্নলিখিত ভাবে কল্পনা করি:

$$\phi(x)=f(x)+A\,.\,x,$$

যেখানে A এমন একটি ধ্রুবক যাতে $\phi(a)=\phi(b)$ হয়। অতএব A ধ্রুবকের মান জানার জন্য আমরা লক্ষ্য করি

$$f(a)+A\,.\,a=f(b)+A\,.\,b.$$

$$\therefore\quad A=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

এখন $f(x)$ এবং $A\,.\,x$ ফাংশন দুইটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং অবিচ্ছিন্ন; অতএব $f(x)+A\,.\,x$ ফাংশনটি (অর্থাৎ $\phi(x)$) ঐ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং অবিচ্ছিন্ন। পুনরায় যেহেতু $f(x)$ এবং $A\,.\,x$ ফাংশন দুইটি (a, b) মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য, সেহেতু $f(x)+Ax$ ঐ মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য হবে। উপরোক্ত A এর মান থেকে আমরা জানি $\phi(a)=\phi(b)$। তাহলে সহায়ক ফাংশন $\phi(x)$এর ক্ষেত্রে রোলের উপপাদ্যের সমস্ত সর্তগুলি সিদ্ধ হবে। সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী (a, b) মুক্ত অন্তরালে অন্তত এমন একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে

$$\phi'(\xi)=0,\quad a<\xi<b$$

যেহেতু $\phi(x)=f(x)+Ax$, সেহেতু $\phi'(x)=f'(x)+A$

$$\therefore\quad \phi'(\xi)=f'(\xi)+A$$

সুতরাং রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী

$$f'(\xi)+A=0$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad f'(\xi)=-A=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore\quad f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$$

অতএব ল্যাগরাঞ্জের প্রথম মধ্যম মান উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণিত হলো।

মন্তব্য: ল্যাগরাঞ্জের প্রথম মধ্যম মান উপপাদ্যটির অন্যরূপ বিবৃতি নিম্নলিখিতভাবে দেওয়া যেতে পারে:

মনে কর $b-a=h$ এবং $\xi=a+\theta h$, যেখানে $0<\theta<1$, তাহলে

উপপাদ্যের সর্তগুলি সিদ্ধ হলে আমরা দেখি যে অন্তত এমন একটি ধনাত্মক সঠিক (proper) ভগ্নাংশ θ আছে যেখানে

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(A)}$$

অনুরূপভাবে $b-a=h$ এবং $\xi=b-\theta_1 h$ $(0<\theta_1<1)$ মনে করলে আমরা পাই

$$f(b-h)=f(b)-hf'(b-\theta_1 h)\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(B)}$$

উদাহরণ 1. মনে করি $f(x)=x-x^3,\ -2\leqslant x\leqslant 1.$

এখানে $f(x)$ ফাংশনটি $[-2, 1]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং অবিচ্ছিন্ন। পুনরায় $f(x)$ ফাংশনটি $(-2, 1)$ মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য। অতএব ল্যাগরাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা পাই

$$f(1)-f(2)=[1-(-2)]f'(\xi)$$

অথবা $0-6=3f'(\xi)$

$$\therefore\quad f'(\xi)=-2$$

কিন্তু $f'(\xi)=1-3\xi^2$

$$\therefore\quad 1-3\xi^2=-2$$

সমাধান করে পাই $\xi=\pm 1$

যেহেতু $-2<\xi<1$, সেহেতু ξ এর একমাত্র সম্ভবপর মান $\xi=-1$

উদাহরণ 2. মনে করি

$$f(x)=\sin x,\quad a\leqslant x\leqslant a+h$$

ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে পাই

$$\sin(a+h)-\sin a=hf'(\xi)=h\cos\xi$$

যেখানে $a<\xi<a+h.$

অনুরূপ ভাবে দেখানো যেতে পারে

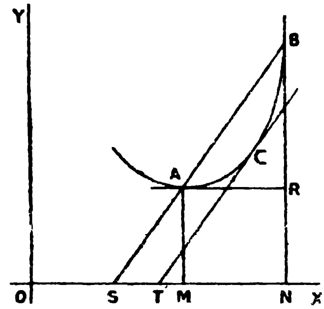
$$\cos x-\cos(x+h)=h\sin\xi,\quad x<\xi<x+h.$$

7.04 ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য—

মনে করি $y=f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং অবিচ্ছিন্ন। ξ মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে একটি বিন্দু যেখানে

$$\frac{f(b)-f(a)}{a-b}=f'(\xi)$$

$y=f(x)$ এর লেখচিত্র A, C, B বিন্দুগুলি যথাক্রমে $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ এবং $(\xi, f(\xi))$। X অক্ষের উপর A এবং B বিন্দু থেকে AM এবং BN লম্ব টানা হল। A বিন্দু থেকে BN এর উপর AR লম্ব টানা হল।



এখন $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{BN-AM}{ON-OM}=\dfrac{BN-NR}{MN}$

$$=\frac{BR}{AR}=\tan\angle BAR=\tan\ \angle BSN$$

পুনরায় $f'(\xi)=\tan\angle CTN$

$$\therefore\quad \angle CTN=\angle BSN$$

অর্থাৎ AB ছেদকটি X অক্ষের সঙ্গে যে কোণ (যথা $\angle BSN$) উৎপন্ন করে, সেই কোণ C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং X অক্ষের সঙ্গে উৎপন্ন কোণ (যথা $\angle CTN$) এর সমান।

অতএব ছেদক AB, C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল। তাহলে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য নিম্নলিখিত বলা যেতে পারে ঃ

$[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র যদি একটি অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখা হয় এবং এই বক্ররেখার যে কোন বিন্দু থেকে যদি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভবপর হয় তাহলে বক্ররেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী অন্তত এমন একটি বিন্দু C আছে যেখানে স্পর্শক প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত জ্যা এর সমান্তরাল।

উদাহরণ 1 দুইটি বিন্দু $A\equiv(1, 1)$ এবং $B\equiv(3, 9)$ এর মধ্যে $y=x^2$ অধিবৃত্তের অংশটুকু দেওয়া আছে। এমন একটি বিন্দু বাহির কর যেখানে অধিবৃত্তের স্পর্শক AB জ্যার সমান্তরাল হবে।

এখানে $f(x)=x^2,\ 1 \leqslant x \leqslant \log_e e$

$$\therefore\quad f'(\xi)=2\xi$$

এবং $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{9-1}{2}=4$

সুতরাং $2\xi=4$ অথবা $\xi=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $=(2, 4)$

উদাহরণ 2 $y=\log_e x$ এর বক্ররেখার উপর এমন একটি বিন্দু বাহির কর যেখানে স্পর্শক $(1, 0)$ এবং $(e, 1)$ এর সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল।

এখানে $f(x)=\log_e x,\quad 1 \leqslant x \leqslant e$

$$\therefore\quad a=1,\quad b=e$$

সুতরাং $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\log_e e-\log_e 1}{e-1}=\dfrac{1}{e-1}$

পুনরায় $f'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$

$\therefore\quad \dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{e-1}$ বা $\xi=e-1$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $=(\,e-1, \log_e(e-1)\,)$

7.05 ল্যাগরাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্যের প্রয়োগ

ল্যাগরাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্যের সাহায্যে কলন বিদ্যায় প্রয়োজনীয় তত্ত্ব পাওয়া যায়। নিম্নে সেগুলো আলোচনা করা হলো।

অনুসিদ্ধান্ত 1 যদি কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে $f'(x)=0$ হয়, তবে ঐ অন্তরালে $f(x)$ একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ : মনে কর $a+h \in [a, b]$

তাহলে মধ্যম মান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$f(a+h)-f(a)=h\,f'(a+\theta h),\quad 0<\theta<1$$
$$=h\times 0=0$$

যেহেতু $f(a+h)=f(a)$, যে কোন বিন্দু $a+h \in [a, b]$ এর জন্য, সেহেতু $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে একটি ধ্রুবক।

মন্তব্য : আমরা জানি $f(x)$ যদি একটি ধ্রুবক ফাংশন হয় তবে তার অন্তরকলজ $f'(x)=0$; এখানে এই সত্যতার বিপরীত বিবৃতি যে সত্য তা দেখানো হলো।

অনুসিদ্ধান্ত 2 যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $g(x)$, $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য হয় এবং যদি প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f'(x) = g'(x)$ হয়, তাহলে ঐ অন্তরালে $f(x) - g(x)$ একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ: যেহেতু প্রত্যেক $x \in [a, b]$ এর জন্য $f'(x) = g'(x)$

সেহেতু আমরা পাই $\phi'(x) = 0$. $x \in [a, b]$, যেখানে $\phi(x) = f(x) - g(x)$

অতএব অনুসিদ্ধান্ত 1 এর সাহায্যে পাই

$\phi(x)$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad \phi(x) = f(x) - g(x) =$ একটি ধ্রুবক, $x \in [a, b]$

মন্তব্য: অনুসিদ্ধান্ত 1 এবং 2 কলন বিদ্যার দ্বিতীয় ভাগে অর্থাৎ সমাকলন বিদ্যায় (Integral Calculus) খুবই প্রয়োজনীয়।

সতর্কতা: যদি $f'(x) = g'(x)$ হয়, তবে $f(x) = g(x)$ লেখা উচিত নয়।

অনুসিদ্ধান্ত 3 যদি একটি ফাংশন $f(x)$ কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং মুক্ত অন্তরাল (a, b), তে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ একদিষ্ট আরোহী বা একদিষ্ট অবরোহী হবে যদি কেবল মাত্র (a, b) অন্তরালে যথাক্রমে $f'(x) > 0$ বা $f'(x) < 0$ হয়।

প্রমাণ: মনে করি α এবং β দুইটি বিন্দু (a, b) অন্তরালে আছে এবং $\alpha < \beta$।

তাহলে মধ্যম মান উপপাদ্য অনুসারে

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\alpha + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

এখন যদি $f'(\alpha + \theta h) > 0$ হয় তবে $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > 0$.

সুতরাং $(\beta - \alpha)\{f(\beta) - f(\alpha)\} > 0$ অর্থাৎ $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে একদিষ্ট আরোহী।

অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে যে যদি $f'(\alpha + \theta h) < 0$ হয়, তবে $(\beta - \alpha)\{f(\beta) - f(\alpha)\} < 0$ অর্থাৎ $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে একদিষ্ট অবরোহী।

পক্ষান্তরে $f(\alpha) < f(\beta)$ হলে $f'(\alpha + \theta h) > 0$

বা $f(\alpha) > f(\beta)$ হলে $f'(\alpha + \theta h) < 0$

অনুসিদ্ধান্ত 4. যদি $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ এর অন্তরকলজ $f'(x)$ বিদ্যমান থাকে এবং $\lim_{x \to \xi} f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে $\lim_{x \to \xi} f'(x) = f'(\xi)$.

প্রমাণ ঃ $$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f'(\xi + \theta h),\ 0 < \theta < 1$$

[মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে]

$$= \lim_{x \to \xi} f'(x)$$

7.06 কসির মধ্যমমান উপপাদ্য

বিবৃতি ঃ যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $\phi(x)$ কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্তগুলির দ্বারা সিদ্ধ হয়

(i) $f(x)$ এবং $\phi(x)$ বদ্ধ অন্তরালে $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f(x)$ এবং $\phi(x)$ মুক্ত অন্তরালে (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য

(iii) মুক্ত অন্তরালের কোন বিন্দুতেই $\phi'(x)$ এর মান শূন্য না হয়

তাহলে মুক্ত অন্তরালে (a, b) তে অন্তত এমন একটি বিন্দু আছে যেখানে

$$\frac{f(b) - f(a)}{\phi(b) - \phi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} \text{ হবে } (a < \xi < b) ।$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু মুক্ত অন্তরালে কোন বিন্দুতেই $\phi'(x)$ এর মান শূন্য নয়, সেহেতু $\phi(b) - \phi(a) \neq 0$ । কারণ, অন্যথায় (অর্থাৎ যদি $\phi(b) - \phi(a) = 0$ হয়) রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী মুক্ত অন্তরালের অন্তত একটি বিন্দুতে $\phi'(x)$ এর মান শূন্য হবে। অতএব মনে করা যেতে পারে

$$\frac{f(b) - f(a)}{\phi(b) - \phi(a)} = A,$$

যেখানে A একটি নির্দিষ্ট সান্ত ধ্রুবক (কারণ $\phi(b) - \phi(a) \neq 0$) । এখন $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সজ্ঞিত নিম্নলিখিত সহায়ক ফাংশন কল্পনা করা যাক্

$$\psi(x) = f(x) - A \cdot \phi(x)$$

তাহলে লক্ষ্য করি

$$\psi(a) - \psi(b) = \{\phi(b) - \phi(a)\} \left(A - \frac{f(b) - f(a)}{\phi(b) - \phi(a)} \right) = 0$$

$\psi(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) মুক্ত অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য। সুতরাং $\psi(x)$ ফাংশনটি রোলের উপপাদ্যের তিনটি সর্তই সিদ্ধ করে।

অতএব রোলের উপপাদ্য অনুযায়ী মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তত এমন একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে $\psi'(\xi)=0,\ \xi \in (a, b)$

অর্থাৎ $f'(\xi)-A\phi'(\xi)=0$ (1)

$$\therefore\quad A=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}\quad (\phi'(\xi)\neq 0)$$

কিন্তু $A=\dfrac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$$ (প্রমাণিত)।

মন্তব্য : (1) লক্ষ্য করা যেতে পারে যে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1),\ \xi_1\in(a, b)$$

এবং $\phi(b)-\phi(a)=(b-a)\,\phi'(\xi_2),\ \xi_2\in(a, b)$

$$\therefore\quad \frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(\xi_1)}{\phi'(\xi_2)},$$

যেখানে ξ_1, ξ_2 এর সমান নাও হতে পারে। সুতরাং ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য থেকে কসির মধ্যমমান উপপাদ্য পাওয়া যেতে পারে না।

(2) কসির মধ্যমমান উপপাদ্য ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যের সামান্যীকরণ। কারণ কসির মধ্যমমান উপপাদ্যে যদি $\phi(x)=x$ বসানো হয়, তবে দেখা যায়

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{1};\quad \xi\in(a, b)$$

অর্থাৎ $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi)$

(3) কসির মধ্যমমান উপপাদ্যের ফলটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)},$$

যেখানে $0<\theta<1$

উদাহরণ : $[1, 2]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)=x^2$ এবং $\phi(x)=x^3$ ফাংশন দুইটির ক্ষেত্রে কসির সূত্রানুসারে পাওয়া যায়

$$\frac{2^2-1^2}{2^3-1^3}=\frac{2\xi}{3\xi^2}$$

অথবা $9\xi^2=14\xi$

অথবা $\xi(9\xi - 14) = 0$

$\therefore$ $\xi = 0$ অথবা $\frac{14}{9}$

যেহেতু $0 \notin (1, 2)$ এবং $\frac{14}{9} \in (1, 2)$, এখানে আমরা পাই $\xi = \frac{14}{9}$

7.07 উচ্চ পর্য্যায়ের মধ্যমমান উপপাদ্য

পূর্বে আলোচিত মধ্যমমান উপপাদ্যগুলিতে ফাংশনের প্রথম অন্তরকলজের মাধ্যমে মধ্যমমান উপপাদ্যগুলি বিবৃত করা হয়েছে। কিন্তু ফাংশনটি ক্রমিক অন্তরকলনযোগ্য হলে উচ্চ পর্য্যায়ের মধ্যমমান উপপাদ্য পাওয়া যেতে পারে।

দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য ঃ যদি একটি ফাংশন $f(x)$ কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্ত দুইটির দ্বারা সিদ্ধ হয়

(i) $f'(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f'(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য

তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে এমন একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(\xi) \text{ হয় } (a < \xi < b)$$

প্রমাণ ঃ—

প্রথমে $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত একটি সহায়ক ফাংশন নিম্নলিখিতভাবে কল্পনা করি ঃ—

$$\phi(x) = f(x) + (b-x) f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!} A$$

যেখানে A এমন একটি ধ্রুবক যাতে $\phi(a) = \phi(b)$ হয়।

ধ্রুবক A এর সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায়

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} A \qquad (1)$$

এখন সহজেই দেখা যায় $\phi(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য ; পুনরায় $\phi(a) = \phi(b)$। সুতরাং $\phi(x)$ ফাংশনটি রোলের উপপাদ্যের তিনটি সর্তর দ্বারা সিদ্ধ হয়। অতএব (a, b) অন্তরালে অন্তত এমন একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে $\phi'(\xi) = 0$ হয়।

এখন $\phi'(x) = f'(x) - f'(x) + (b-x) f''(x) - (b-x)A$

$$= (b-x) f''(x) - (b-x)A$$

$\therefore$ $\phi'(\xi) = (b-\xi) f''(\xi) - (b-\xi)A$

যেহেতু $\phi'(\xi)=0$, আমরা পাই

$$A=f''(\xi) \quad \cdots \quad (2)$$

অতএব (1) এবং (2) থেকে পাই

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(\xi),$$

উহাই দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য। (প্রমাণিত)

অনুরূপভাবে আমরা নিম্নলিখিত তৃতীয় মধ্যমমান উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারি ঃ—

তৃতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য ঃ যদি একটি ফাংশন $f(x)$ কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্ত দুইটির দ্বারা সিদ্ধ হয় ঃ

(i) $f''(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f''(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য

তাহলে মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে এমন একটি বিন্দু ξ আছে যেখানে

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)$$

$$+\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(\xi) \text{ হয় } (a<\xi<b)।$$

প্রমাণের সংকেত ঃ—এখানে সহায়ক ফাংশন হিসাবে ধর ঃ—

$$\phi(x)=f(x)+(b-x)f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)+\frac{(b-x)^3}{3!}A,$$

যেখানে A এমন একটি ধ্রুবক যাতে $\phi(a)=\phi(b)$ হয়।

এইভাবে উচ্চ পর্য্যায়ের মধ্যমমান উপপাদ্য উত্তরোত্তর আলোচনা করলে আমরা নিম্নলিখিত বিশ্ববিখ্যাত গাণিতিক টেলরের উপপাদ্য পাই ঃ—

টেলরের উপপাদ্য ঃ

বিবৃতি ঃ যদি একটি ফাংশন $f(x)$, কোন এক বদ্ধ অন্তরাল $[a, a+h]$ তে সংজ্ঞিত হয় এবং নিম্নলিখিত সর্তগুলির দ্বারা সিদ্ধ হয় ঃ

(i) $f^{(n-1)}(x)$ অর্থাৎ $f(x)$ এর $(n-1)$ তম অন্তরকলজ বিদ্যমান এবং $[a, a+h]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন

(ii) $f^{(n-1)}(x)$ ফাংশনটি মুক্ত অন্তরাল $(a, a+h)$ তে অন্তরকলনযোগ্য

(iii) p এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা যাতে $0<p\leqslant n$ তাহলে অন্তত একটি ধনাত্মক সঠিক ভগ্নাংশ θ আছে যেখানে

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p}f^{(n)}(a+\theta h)$$

হয় $(0<\theta<1)$ ।

প্রমাণ ঃ বর্তমান উপপাদ্যের প্রমাণের জন্য নিম্নলিখিত সহায়ক ফাংশন কল্পনা করি ঃ

$$\phi(x)=f(x)+(a+h-x)f'(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+(a+h-x)^pA,$$

যেখানে A এমন একটি ধ্রুবক যাতে $\phi(a)=\phi(a+h)$ হয় ।

ধ্রুবক A এর সংজ্ঞা থেকে পাই

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+Ah^p \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন সহজেই অনুমেয় যে $\phi(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন এবং (a, b) অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য ; পুনরায় $\phi(a)=\phi(b)$ । সুতরাং $\phi(x)$ ফাংশনটি রোলের উপপাদ্যের তিনটি সর্তর দ্বারা সিদ্ধ । অতএব (a, b) অন্তরালে অন্তত এমন একটি ধনাত্মক সঠিক ভগ্নাংশ θ আছে যেখানে $\phi'(a+\theta h)=0$, $(0<\theta<1)$ ।

এখন

$$\phi'(x)=f'(x)$$
$$-f'(x)+(a+h-x)f''(x)$$
$$-(a+h-x)f''(x)+\frac{(a+h-x)^2}{2!}f'''(x)$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$-\frac{(a+h-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x)+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)$$
$$-pA(a+h-x)^{p-1}$$

$$= \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - pA(a+h-x)^{p-1}$$

যেহেতু $\phi'(a+\theta h)=0$, আমরা পাই

$$pA(h-\theta h)^{p-1} = \frac{(h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

অর্থাৎ $A = \dfrac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta h)$ ... (2)

অতএব আমরা (i) এবং (2) থেকে পাই

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(a+\theta h)$$

উহাই টেলরের উপপাদ্য (প্রমাণিত)।

প্রয়োজনীয় মন্তব্য : টেলরের উপপাদ্যে n-তম পদের পরবর্তী পদ অর্থাৎ

$$\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} + f^{(n)}(a+\theta h)$$

কলন-বিদ্যায় **অবশিষ্টাংশ** (remainder) নামে অভিহিত।

এখন যদি প্রশ্নপত্রে টেলারের উপপাদ্যটি ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশসহ প্রমাণ করতে বলা হয়, তবে উপরোক্ত প্রমাণ লিখে উল্লেখ করতে হবে যে এই উপপাদ্যে যে অবশিষ্টাংশের কথা বলা হয়েছে তা সাধারণ অবশিষ্টাংশ এবং ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ পেতে হলে $p=n$ বসাতে হবে (যেহেতু $0<p\leqslant n$) অর্থাৎ

ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ $= \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$

অতএব ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশসহ টেলরের উপপাদ্যের সূত্র নিম্নরূপ ঃ—

$$\text{(A)}\left\{\begin{aligned} & f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ & + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h);\ 0<\theta<1 \end{aligned}\right.$$

আবার প্রশ্নপত্রে যদি টেলরের উপপাদ্যটি কসির অবশিষ্টাংশ সহ প্রমাণ করতে বলা হয়, তবে উপরোক্ত প্রমাণ লিখে উল্লেখ করতে হবে যে সাধারণ অবশিষ্টাংশ থেকে কসির অবশিষ্টাংশ পেতে হলে $p=1$ বসাতে হবে (যেহেতু $0<p\leqslant n$) অর্থাৎ

কসির অবশিষ্টাংশ $= \dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\theta h)$

অতএব কসির অবশিষ্টাংশ সহ টেলারের উপপাদ্যের সূত্র নিম্নরূপ ঃ—

$$(B)\begin{cases} f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots \\ +\dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+\dfrac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta h),(0<\theta<1) \end{cases}$$

উদাহরণ ঃ $f(x)=x^3-2x^2+3x+5$ এই বহুপদ রাশিকে $(x-2)$ এই দ্বিপদ রাশির ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার শক্তিতে বিস্তৃত কর।

সমাধান ঃ প্রথমে ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ সহ টেলরের উপপাদ্যের সূত্রটি নিম্নলিখিতভাবে লেখা যাক্ ঃ—

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

যেখানে $\xi=a+\theta(x-a)$ এবং $0<\theta<1$.

তাহলে এখানে

$$f'(x)=3x^2-4x+3$$

$$f''(x)=6x-4$$

$$f'''(x)=6$$

এবং $f^{(n)}(x)=0$, যখন $n\geqslant 4$

সুতরাং $f(2)=11,\quad f'(2)=7,\quad f''(2)=8,\quad f'''(2)=6, f^{(n)}(2)=0$ যখন $n\geqslant 4$.

$$\therefore\quad x^3-2x^2+3x+5=11+(x-2)\cdot 7+\frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8+\frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6$$

$$=11+7(x-2)+4(x-2)^2+(x-2)^3$$

উদাহরণ ঃ $f(x)=e^x$ ফাংশনটিকে $(x+1)$ এর শক্তিতে $(x+1)^4$ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান ঃ এখানে $f^{(n)}(x)=e^x$; $n=0, 1, 2\ldots\ldots$

এবং $f^{(n)}(-1)=\frac{1}{e}$

$$\therefore\quad e^x=\frac{1}{e}+(x+1)\cdot\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{2!}\cdot\frac{1}{e}+\frac{(n+1)^3}{3!}\cdot\frac{1}{e}$$

$$+\frac{(n+1)^4}{4!}e^{\xi}$$

যেখানে $\xi=-1+\theta(x+1)$ এবং $0<\theta<1$.

7.08 ম্যাক্লরিণের উপপাদ্য ঃ

টেলরের উপপাদ্যে $a=0$ এবং $h=x$ বসিয়ে ম্যাক্লরিণের উপপাদ্যর সূত্রটি পাওয়া যায়। যথা

$$f(x)=f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2\,!}f''(0)+\cdots\cdots$$

(*)

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)\,!\,p}f^{(n)}(\theta x)$$

ম্যাক্লরিণের উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে বলা হলে টেলরের উপপাদ্যের প্রমাণটি লিখতে হবে।

এখন ম্যাক্লরিনের উপপাদ্যটির সূত্র ল্যাগরাঞ্জের (বা কসির) অবশিষ্টাংশ সহ নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে ঃ

(A) $$f(x)=f(0)+x f'(0)+\frac{x^2}{2\,!}f''(0)+\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n\,!}f^{(n)}(\theta x),\ \ 0<\theta<1$$

(B) $$f(x)=f(0)+x\ f'(0)+\frac{x^2}{2\,!}f''(0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n)}(\theta x),\ \ 0<\theta<1$$

(A) এবং (B) যদিও একই θ দ্বারা সূত্রটি লেখা হয়েছে, প্রকৃতপক্ষে θ এর মান এক হওয়ার কোন যুক্তি নাই ; কিন্তু উভয় ক্ষেত্রে $\theta \in (0, 1)$।

ম্যাক্লরিনের উপপাদ্যটি প্রয়োগের ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়।

উদাহরণ ঃ মনে কর $f(x)=\sin x$; তাহলে $f(0)=0$

এবং $f'(x)=\sin(\pi/2+x)$; $\therefore\ f'(0)=1$

$f''(x)=\sin(2\pi/2+x)$; $\therefore\ f''(0)=0$

$f'''(x)=\sin(3\pi/2+x)$; $\therefore\ f'''(0)=-1$

$f^{iv}(x)=\sin(4\pi/2+x)$; $\therefore\ f^{iv}(0)=0$

... ...

$f^{(n)}(x)=\sin(n\pi/2+x)$; $\because\ f^{(n)}(0)=\sin n\pi/2$

অতএব (A) থেকে আমরা পাই

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots\cdots$$

$$+\frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}\sin(n-1)\pi/2+\frac{x^n}{n\,!}\sin(n\pi/2+\theta x)$$

7.09 টেলর ও ম্যাক্লরিণের অসীম শ্রেণী।

টেলর উপপাদ্যের ফাংশনটি $f(x)$ যদি এমন হয় যে $f(x)$ এর সকল প্রকার ক্রমিক অন্তরকলজগুলি $[a, a+h]$ বদ্ধ অন্তরালে বিদ্যমান হয় এবং $\lim\limits_{n\to\infty} R^n = A$, $0 < \theta < 1$, যেখানে

$$R^n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\ p} f^{(n)}(a+\theta h),$$

[যদি R_n ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ হয় তবে $R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$ হবে, আবার যদি R_n কসির অবশিষ্টাংশ হয় তবে $R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h)$ হবে]

তাহলে

$$(1)\quad f(a+h) = A + f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

অর্থাৎ $f(a+h)$ এর টেলরের শ্রেণীটি অসীম শ্রেণী আকারে বিস্তৃত হতে পারে।

প্রমাণ : টেলরের উপপাদ্য থেকে জানা আছে

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

অর্থাৎ $f(a+h) - R_n = f(a) + h f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$

$= S_n$ (ধরা যাক্)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} [f(a+h) - R_n] = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

বা $f(a+h) - \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

বা $f(a+h) = A + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} [D^n f(x)]_{x=a}$

$\therefore f(a+h) = A + f(a) + h f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$ (প্রমাণিত)।

এখন যদি $A = 0$, তবে (1) থেকে পাওয়া যায়

$$(2)\quad f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

যেহেতু $f(a+h) = S_n + R_n$, সেহেতু যদি $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ হয়, তবে

$\lim_{n\to\infty} S_n = f(a+h)$ এবং বিপরীতভাবে যদি $\lim_{n\to\infty} S_n = f(a+h)$ হয় তবে $\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$

অতএব $f(x+h)$ এর অসীম বিস্তৃতির জন্য আবশ্যকীয় এবং পর্য্যাপ্ত সর্ত হলো $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$; লক্ষ্য করা উচিত যে যদি $\{S_n\}$ ক্রম অভিসারী হয় তবে $\{R_n\}$ অভিসারী হবে, কিন্তু $\lim_{n\to\infty} R_n$ এর মান শূন্য হতেও পারে বা নাও হতে পারে।

সুতরাং $f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots\cdots$ এই শ্রেণীর অভিসরণ টেলরের অসীম বিস্তৃতির পক্ষে পর্য্যাপ্ত নয় ; সেজন্য $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ এই সর্তটির প্রয়োজন।

ম্যাক্লরিণের উপপাদ্যের ক্ষেত্রে আমরা অনুরূপভাবে লক্ষ্য করতে পারি যে যদি $[0, x]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ এর সকল প্রকার অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে এবং ম্যাক্লরিণের শেষ পদ $R_n \to 0$ হয় যখন $n \to \infty$, **ম্যাক্লরিণের অসীম শ্রেণী** অর্থাৎ

$$f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots\cdots$$

$f(x)$ এর দিকে অভিসারী হবে।

$$(3) \quad \therefore \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots\cdots$$

ম্যাক্লরিনের এই অসীম শ্রেণী $f(x)$ এর ঘাত-শ্রেণী (power series) আকারে বিস্তৃতির পক্ষে খুবই প্রয়োজনীয়।

উদাহরণ 1 যদি $\phi(x) = e^x + f(x)$

যেখানে $f(x) = 0,$ যখন $x = 0$

$= e^{-\frac{1}{x^2}},$ যখন $x \neq 0$;

তবে দেখাও যে $\phi(x)$ এর ম্যাক্লরিনের অসীম শ্রেণী অভিসারী, কিন্তু ঐ শ্রেণী $\phi(x)$এর দিকে অভিসারী হবে না।

সমাধান : স্পষ্টতঃই আমরা পাই

$$f^{(n)}(x) = \frac{\psi(x)}{x^p}\ e^{-1/x^2}\ ;\ n = 1, 2, \cdots\cdots$$

যেখানে $\psi(x)$ একটি বহুপদ রাশি এবং $p > 1$.

তাহলে $f^{(n)}(0)=0$; $n=1, 2, \cdots\cdots$ $\left(\because \lim_{y\to\infty} \frac{y^p}{e^{y^2}}=0\right)$

$\therefore \quad \phi^{(n)} 0=0$; $n=1, 2, \cdots\cdots$.

সুতরাং আমরা পাই

$$\phi(0)+x\phi'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\phi^{(n)}(0)+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots,$$

ইহা একটি অভিসারী শ্রেণী এবং ইহা e^x এর দিকে অভিসারী হবে।

$$\therefore \quad \phi(x) \neq \phi(0)+x\phi'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\phi^{(n)}(0)+\cdots$$

ম্যাক্লরিণের অসীম শ্রেণী $\phi(x)$ এর দিকে অভিসারী না হওয়ার কারণ এই যে R_n রাশিটি শূন্যের অভিমুখী নয় যখন $n\to\infty$

উদাহরণ 2. মনে কর $f(x)=e^x$

তাহলে $f^{(n)}(x)=e^x$; $n=1, 2, \cdots\cdots$

$\therefore \quad f^{(n)}(0)=1$; $n=1, 2, \cdots\cdots$

এখন ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ $R_n=\frac{x^n}{n!}e^{\theta x}$

যেহেতু $0<\theta<1$, $e^{\theta x}$ ফাংশনটি সপ্রান্ত এবং $\frac{|x|^n}{n!}\to 0$,

যখন $n\to\infty$; সুতরাং $R_n\to 0$, যখন $n\to\infty$।

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

উদাহরণ 3. মনে কর $f(x)=\log_e(1+x)$; $-1<x\leqslant 1$

প্রথমে মনে করি $f(x)=\log(1+x)$, $x>-1$

$$\text{তাহলে} \quad f^n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

এখন কসির অবশিষ্টাংশ $R_n=(-1)^{n-1}x^n\frac{1}{1+\theta x}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$

মনে করা যাক্ $|x| < 1$, তাহলে $x^n \to 0$; $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, এবং

$$\frac{1}{1+\theta x} < 1/(1-|x|)$$

$$\therefore \quad R_n \to 0, \text{ যখন } n \to \infty$$

কিন্তু যখন $x=1$, তখন কসির অবশিষ্টাংশের পরিবর্তে ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ ধরলে দেখা যায়

$$R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \quad \bullet$$

এখন $R_n \to 0$, যখন $n \to \infty$ (এক্ষেত্রে কসির অবশিষ্টাংশ আমাদের পক্ষে খুব সুবিধাজনক নয়, কারণ তখন x_n পদটি শূন্য অভিমুখী নয় যখন $n \to \infty$)।

$$\therefore \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

উদাহরণ 4. ম্যাক্লরিণের অসীম শ্রেণীর সাহায্যে দেখান যেতে পারে যে

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\text{এবং} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

উদাহরণ 5. মনে কর $f(x) = \cosh x$

এখানে $f^{(n)}(x) = \cosh x$, যখন n যুগ্ম

$= \sinh x$ যখন n বিযুগ্ম

তাহলে $f^{(n)}(0) = 1$, যখন n যুগ্ম

$= 0$, যখন n বিযুগ্ম।

পুনরায় ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ $R_n = \dfrac{x^n}{n!} \cosh \theta x$, যখন n যুগ্ম

$= \dfrac{x^n}{n!} \sinh \theta x$, যখন n বিযুগ্ম

এখন $|\cosh \theta x| = \dfrac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2} \leqslant e^{|x|}$

এবং $|\sinh \theta x| = \dfrac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2} \leqslant e^{|x|}$

$$\therefore \quad |R^n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!} e^{|x|}$$

যেহেতু $\frac{|x|^n}{n!} \to 0$, যখন $n \to \infty$, সেহেতু $R_n \to 0$

$$\therefore \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

7.10 ল' সপিটাল—বার্ণোলির উপপাদ্য ঃ

সীমা নির্ধারণের কতকগুলি বিশেষ ক্ষেত্রে ল' সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্যের সাহায্যে সীমা নির্ধারণ অনেক সহজসাধ্য হয়। সেজন্য এই উপপাদ্যটি জানা প্রয়োজন। উপপাদ্যটি নিম্নে বিবৃত করা হলো।

উপপাদ্য। যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $\phi(x)$ বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন হয় এবং মুক্ত অন্তরাল $[a, b]$ তে $f'(x)$ এবং $\phi'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং $f'(x) - \cap = \phi'(x)$ না হয় এবং উপরন্তু যদি

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} \phi(x) = 0 \quad \text{হয়, তবে}$$

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{\phi'(x)};$$

অবশ্য ডান পক্ষের সীমার অস্তিত্ব আবশ্যক।

প্রমাণ ঃ

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন $x = a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, সেহেতু

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

কিন্তু $\lim_{x \to a+} f(x) = 0$

$\therefore \quad f(a) = 0$

অনুরূপভাবে $\phi(a) = 0$

এখন কসির মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\frac{f(x) - f(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}, \quad a < \xi < x$$

অর্থাৎ $\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$

সুতরাং $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}$

এখন $\xi \to a+$, যখন $x \to a+$; কারণ $a < \xi < x$

$$\therefore \lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

মন্তব্য : (1) উপরোক্ত উপপাদ্যের সামান্যীকরণের ফলে পাওয়া যেতে পারে

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)},$$

অবশ্য ডান পক্ষের সীমার অস্তিত্ব আবশ্যক।

(2) উপরোক্ত উপপাদ্যটি নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যেতে পারে : যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $\phi(x)$ কোন এক অন্তরালে কসির মধ্যমমান উপপাদ্য সিদ্ধ করে এবং সেই অন্তরালের মধ্যবর্তী কোন বিন্দু যথা $x = a$ তে এমন হয় যে $f(a) = \phi(a) = 0$ এবং $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ এর অস্তিত্ব থাকে ; তাহলে $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ এর অস্তিত্ব থাকবে এবং

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

পুনরায় যদি $f'(a) = \phi'(a) = 0$ এবং $f'(x)$ এবং $\phi'(x)$ ফাংশন দুইটি $f(x)$ এবং $\phi(x)$-এর উপর যে সব সর্ত আরোপিত ছিল সেই সব সর্ত যদি মানে, তাহলে $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ এর উপর ল'সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্য প্রয়োগে পাওয়া যায়

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\phi''(x)};$$

পুনরায় $f''(a) = \phi''(a) = 0$ হইলে উপপাদ্যটি সামান্যীকরণ করা যেতে পারে।

উদাহরণ 1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

উদাহরণ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{3}$$

$$= \tfrac{5}{3}.$$

উদাহরণ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}$$

$$= 1.$$

উদাহরণ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

মন্তব্য (3) ল'সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্য নিম্নলিখিত ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য ঃ—

যদি $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ এবং $\lim\limits_{x\to\infty} \phi(x) = 0$;

কারণ, মনে করি $x = \dfrac{1}{z}$, তাহলে $z\to 0$, যখন $x\to\infty$ এবং

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0, \quad \lim_{z\to 0} \phi\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

এখন ল' সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(1/z)}{\phi(1/z)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

উদাহরণ 5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{5\cos\frac{5}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} 5\cos\frac{5}{x} = 5$$

মন্তব্য (4) ল' সপিটাল-বার্ণোলির উপপাদ্যের সামান্যীকরণ নিম্নলিখিতভাবেও হতে পারে ঃ—

যদি দুইটি ফাংশন $f(x)$ এবং $\phi(x)$, a এর যে অঞ্চলের প্রত্যেকটি বিন্দুতে (a ছাড়া) অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরকলনযোগ্য হয়, $\phi'(x) \neq 0$

এবং $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \phi(x) = \infty$

এবং $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$ এর অস্তিত্ব থাকে ;

তবে $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ এর অস্তিত্ব থাকবে এবং

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

উপপাদ্যটির $x\to\infty$ এর ক্ষেত্রেও সামান্যীকরণ হতে পারে।

উদাহরণ 6. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\tan x}{\tan 3x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1/\cos^2 x}{3/\cos^2 3x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 3x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\left(\frac{-1}{1}\right) = -3(-1) = 3$$

উদাহরণ 7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{nx^n}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots 1}{e^x} = 0$$

উদাহরণ 8. $\lim_{x\to 0} x^n \log x = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{x^n}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-n}{x^{n+1}}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n} = 0$$

উদাহরণ 9. $\lim_{x\to 0} x^x \quad (0^0)$

মনে কর $y = x^x$

$\therefore \quad \log y = x \log x$

এখন $\log(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0} (\log y)$

$$= \lim_{x\to 0} (x \log x)$$

কিন্তু $\lim_{x\to 0} (x \log x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0$

$\therefore \quad \log\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0$

অর্থাৎ $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} x^x = 1$

উদাহরণ 10. $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$

এখানে $\lim_{x\to 0} \log(\cos 2x)^{3/x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3 \log(\cos 2x)}{x^2}$$

$$= -6 \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= -6 \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 2x}{2} = -6$$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2} = e^{-6}$

7.11. বিশেষ উদাহরণ :

1. যদি $f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(\theta h)$

হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর যখন $h=1$ এবং $f(x)=(1-x)^{\frac{5}{2}}$

উত্তর : যেহেতু $f(x)=(1-x)^{\frac{5}{2}}$, সেহেতু $f(h)=(1-h)^{\frac{5}{2}}$, $f(0)=1$

পুনরায় $f'(x)=-\frac{5}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}$, $f''(x)=\frac{15}{4}(1-x)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$(1-h)^{\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}h+\frac{h^2}{2!}\,\frac{15}{4}(1-\theta h)^{\frac{1}{2}}$$

এখন $h=1$ হলে পাওয়া যায়

$$0=1-\frac{5}{2}+\frac{15}{8}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} \quad \text{অথবা} \quad (1-\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \theta=\frac{9}{25}$$

2. যদি $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\epsilon)$, $a<\epsilon<b$ এবং

$f(x)=x(x-1)(x-2)$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$ হয়, দেখাও যে

$$\epsilon=1-\sqrt{\tfrac{7}{12}}$$

উত্তর :— $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})=\frac{3}{8}$

$f(0)=0$, $(b-a)=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$$
$$=3x^2-6x+2$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{2}(3\epsilon^2-6\epsilon+2)$$

অথবা $12\epsilon^2-24\epsilon+5=0$

$$\therefore \quad \epsilon=\frac{24\pm\sqrt{24^2-4.12.5}}{24}$$

$$=1\pm\frac{4}{24}\sqrt{36-15}=1\pm\frac{1}{6}\sqrt{21}=1\pm\sqrt{\tfrac{21}{36}}$$

$$=1\pm\sqrt{\tfrac{7}{12}}$$

কিন্তু যেহেতু $0<\epsilon<\frac{1}{2}$, সেহেতু $\epsilon=1-\sqrt{\frac{7}{12}}$

3. প্রমাণ কর :

$$x\cot x=1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4+\cdots\cdots$$

উত্তর :—

মনে কর $x \cot x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$

$$\therefore \quad x \cos x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots) \sin x$$

অর্থাৎ $x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) = (a_0 + a_1 x - a_2 x + \cdots)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$

উভয় পক্ষের x এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ তুলনা করলে পাওয়া যায়

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\tfrac{1}{3},\ a_3 = 0,\ 0_4 = -\tfrac{1}{45}$$

$$\therefore \quad x \cot x = 1 - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{45}x^4 + \cdots\cdots\cdots$$

4. যদি $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ হয়, দেখাও যে

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0\ ;$$

এক্ষণে $\sin(m \sin^{-1} x)$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ লেখ।

উত্তর ঃ—

মনে করি $f(x) = \sin(m \sin^{-1} x)$

$$y_1 = \cos(m \sin^{-1} x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{1 - x^2} \cdot y_1 = m \cos(m \sin^{-1} x)$$

উভয় পক্ষের পুনরায় অন্তরকলনের ফলে পাওয়া যায়

$$\sqrt{1 - x^2} \cdot y_2 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot y_1 = -m \sin(m \sin^{-1} x) \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - x^2}}$$

অথবা $(1 - x^2)y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

এখন লাইবনিজের উপপাদ্যের সাহায্যে ক্রমিক অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2x)ny_{n+1} - \frac{2(n)(n-1)}{2!}y_n$$

$$- xy_{n+1} - ny_n + m^2 y_n = 0$$

অথবা $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$

(প্রমাণিত)

$x = 0$ বসালে আমরা পাই

$(y)_0$ অর্থাৎ $f(0) = 0$

$(y_1)_0$ অর্থাৎ $f'(0) = m$

$(y_2)_0$ অর্থাৎ $f''(0) = 0$

এবং $(y_{n+2})_0 = (n^2 - m^2)(y_n)_0$

অর্থাৎ $f^{(n+2)}(0) = (n^2 - m^2) f^{(n)}(0)$

যখন $n = 2, 4, 6, \cdots\cdots$, তখন $f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \cdots = 0$

আবার যখন $n = 1, 3, 5, \cdots$, তখন $f^{(3)}(0) = m(1^2 - m^2)$,

$f^{(5)}(0) = m(1^2 - m^2)(3^2 - m^2)$ ইত্যাদি।

এখন ম্যাক্লরিণের অসীম শ্রেণীর সাহায্যে জানা আছে

$$f(x) = f(x) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots\cdots,$$

অবশ্য যদি $R_n \to 0$, যখন $n \to \infty$ হয়।

এখানে $R_n \to 0$ যখন $n \to \infty$ দেখান যেতে পারে।

$\therefore \quad \sin(m \sin^{-1} x)$

$$= mx - \frac{m(m^2 - 1^2)}{3!} x^3 + \frac{m(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{5!} x^5 - \cdots -$$

5. মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে $\sqrt[6]{65}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

উত্তর: মনে কর $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $a = 64$, $b = 65$

$\therefore$ মধ্যম মান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$f(65) - f(64) = (65 - 64) f'(\xi), \quad 64 < \xi < 65$$

$$= \frac{1}{6(\xi)^{\frac{5}{6}}}$$

এখন আসন্ন মানের জন্য $\xi = 64$ ধরলে পাওয়া যায়

$$\sqrt[6]{65} - \sqrt[6]{64} = 1/\{6(64)^{\frac{5}{6}}\} = 2 + \tfrac{1}{192} = 2.00521$$

5. দেখাও যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}\ ;$$ যদি $a < b$ হয়।

উত্তর:— মনে কর $f(x) = \tan^{-1} x$

$$\therefore \quad f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$$

মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$\frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b-a} = \frac{1}{1+\xi^2}\ ;\ a < \xi < b$$

যেহেতু $\xi > a$, সেহেতু $\dfrac{1}{1+\xi^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$

পুনরায় যেহেতু $\xi < b$, সেহেতু $\dfrac{1}{1-\xi^2} > \dfrac{1}{1+b^2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+b^2} < \frac{\tan^{-1}b - \tan^{-1}a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

অথবা $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} b < \dfrac{b-a}{1-a^2}$

7. প্রমাণ কর e একটি 'ইররাসানাল' (Irrational) সংখ্যা।

উত্তর :— আমরা জানি

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \; ; \; 0 < \xi < x$$

এখন $x = 1$ ধরে এবং যদি সম্ভব হয় e একটি 'র‍্যাসানাল' (Rational সংখ্যা ($e = p/q$) মনে করে পাই

$$e = p/q = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \; ; \; 0 < \xi < 1$$

পুনরায় মনে করি $n > q$ এবং উভয় পক্ষকে $n!$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$n!\, e = n!\, \frac{p}{q} = n! + n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} + \cdots + 1 + \frac{e^{\xi}}{n+1}$$

এখন $0 < \dfrac{e^{\xi}}{n+1} < 1$ ($\because$ $e^{\xi} < e < 3$ এবং $n > q \geqslant 2$), অথচ শেষ সমতার ডান দিকের অপর প্রত্যেকটি পদ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অতএব একটি পূর্ণসংখ্যা একটি ভগ্নাংশের সমান। ইহা অসম্ভব। সুতরাং e কখনই 'র‍্যাসানাল' (Rational) হতে পারে না।

বিবিধ অনুশীলনী 7

1. (i) রোলের উপপাদ্য বিবৃত কর (প্রমাণ দিতে হবে না) এবং $f(x) = \sin x \cos x$ কে নিয়ে $[0, \pi/2]$ বদ্ধ অন্তরালে উপপাদ্যটির সত্যতা প্রতিপাদন কর।

(ii) $[-1, 1]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ ফাংশনটিতে রোলের উপপাদ্যটি প্রযোজ্য কিনা বল যেখানে

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad \text{যখন} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ &= -x \quad \text{যখন} \quad -1 \leqslant x < 0 \end{aligned}$$

(iii) $f(x)=x^3(x-1)^2$ ফাংশনটির বদ্ধ অন্তরাল $[0, 1]$ তে রোলের উপপাদ্যের সত্যতা প্রতিপাদন কর।

2. রোলের উপপাদ্যের প্রমাণে অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের যে ধর্মের সাহায্য নেওয়া হয়েছে তা পরিষ্কারভাবে আলোচনা কর। অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের অপর যে কোন একটি ধর্মের উল্লেখ কর।

3. যদি $f(x)=2x^3+3x^2+6x$ হয়, তবে রোলের উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে x এর দুইটি বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর দুইটি মান কখনই সমান নয়।

4. যদি $f(x)=\tan x$ হয়, তবে $f(x)=0$ এবং $f(\pi)=0$; এখন $(0, \pi)$ মুক্ত অন্তরালে $f'(x)=0$ হওয়ার সত্যতা পরীক্ষা কর।

5. যদি $(y+1)^3=x^2$ হয়, তবে $y=0$ যখন $x=-1$ এবং $y=0$ যখন $x=1$; এখন $(-1, 1)$ মুক্ত অন্তরালে $y'=0$ হওয়ার সত্যতা পরীক্ষা কর।

6. ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং উপপাদ্যের জ্যামিতিক অর্থ নির্ধারণ কর।

দেখাও যে $x^5+2x^3-5x-10=0$ সমীকরণের $(1, 2)$ অন্তরালে একটি মাত্র বীজ আছে।

7. যদি $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$ হয় তবে c এর মান নির্ণয় কর যখন $f(x)=2x^2-7x+10$ এবং $a=2, b=5$.

8. যদি $f'(x)>0$ হয় যে কোন (a, b) অন্তরালে, তাহলে দেখাও যে $f(x)$ একটি একদিষ্ট আরোহী ফাংশন [মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্য নাও]।

9. কসির মধ্যমমান উপপাদ্য থেকে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যটি অনুমান কর। ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য থেকে কি কসির মধ্যমমান উপপাদ্যটি পাওয়া যেতে পারে ?

10. শ্রেণীর n রাশির পরে ল্যাগরাঞ্জের আবিষ্কৃত অবশিষ্টাংশ সম্বলিত টেলরের উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

$e^x \sin x$ ফাংশনটির ক্ষেত্রে অবশিষ্টাংশ নির্ণয় কর।

11. x যদি সূক্ষ্মকোণ হয়, দেখাও যে

$$\log_e \sec x = \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\cdots$$

12. ল্যাগরাঞ্জের অবশিষ্টাংশ সম্বলিত ম্যাক্লারিণ শ্রেণীতে $\log(1-x)$ কে বিস্তৃত কর।

13. ল'সপিটাল উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ কর :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

14. a^x এর বিস্তৃতি আলোচনা কর।

15. প্রমাণ কর :

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} = -3$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} = -1/4$

(3) $\lim\limits_{x\to \pi+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to \pi/2-}(\tan x)^{\cos x} = 1$

(5) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x} = 1$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = 1$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x} = 1$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{a}{x} - \cot\dfrac{x}{a}\right\} = 0$

(9) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x} = -1$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right) = \dfrac{1}{3}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{1}{3}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\log(1+x)}{\log(1+\sin x)} = 1$

(13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}\right) = \dfrac{1}{2}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0} (\cot^2 x)^{\sin x} = 1$

(15) $\lim\limits_{x\to 0} (\sec x)^{\cot^2 x} = e^{\frac{1}{2}}$

16. দেখাও যে

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

এক্ষণে অনুমান কর

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

17. প্রমাণ কর ঃ

$$\cos(m \cos^{-1} x) = 1 - \frac{m^2}{2\,!}x^2 + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{4\,!}x^4 - \cdots$$

18. প্রমাণ কর ঃ

(i) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

(ii) $\log(1 + \cos x) = \log 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + \cdots$

19. যদি $y = e^{ax} \cos bx$ হয়, তবে দেখাও যে

$$y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)y = 0$$

এখানে প্রমাণ কর

$$e^{ax} \cos bx = 1 + ax + \frac{a^2 - b^2}{2\,!}x^2 + \frac{a(a^2 - 3b^2)}{3\,!}x^3 + \cdots$$

উপরোক্ত বিস্তৃতি থেকে e^{ax} এবং $\cos bx$ এর বিস্তৃতি আলোচনা কর।

20. প্রমাণ কর ঃ

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

21. যদি $f(x) = x(1 + x + x^2)$ এবং $g(x) = \dfrac{1 - x^4}{1 - x}$ হয়, তবে দেখাও যে $f'(x) = g'(x)$; অন্তরকলজের এই সমতা থেকে $f(x)$ এবং $g(x)$ এর মধ্যে সম্বন্ধ স্থাপন কর।

22. দেখাও যে, $\log(\sec x + \tan x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + \cdots$

23. মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে $\sqrt[4]{19}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

24. নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির ক্ষেত্রে কি ম্যাক্লরিনের শ্রেণী পাওয়া যেতে পারে ?

(i) $\sqrt{x}$ (ii) $x^{\frac{5}{2}}$ (iii) $\log_e x$

কারণ উল্লেখ করে বিস্তৃত আলোচনা কর।

25. যদি $\lim_{x\to 0} \frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$ হয়,

তবে দেখাও যে $a=-5/2$ এবং $b=-\frac{3}{2}$.

26. দেখাও যে

$$x<\log\frac{1}{1-x}<\frac{x}{1-x}, \text{ যখন } 0<x<1$$

[সংকেত : মনে কর $f(x)=\log\frac{1}{1-x}-x$, দেখাও $f'(x)>0$

আবার মনে কর $\phi(x)=\frac{x}{1-x}-\log\frac{1}{1-x}$,

দেখাও $\phi'(x)>0$; ইত্যাদি]

27. মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখাও যে

$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\to f''(x)$, যখন $h\to 0$ এবং $f''(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

[সংকেত : প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{[f(x+2h)-f(x+h)]-[f(x+h)-f(x)]}{h^2}$$

$$=\frac{hf'(x+h+\theta_1 h)-hf'(x+\theta_2 h)}{h^2}$$

$$=\frac{1}{h}[hf''(x+\theta_2 h+\theta_3\ [(h+\theta_1 h)-(\theta_2 h)]\ ]$$

28. দেখাও যে

$$\log_e(x+1)=x-\frac{x^2}{2(\theta x+1)^2}$$

এক্ষণে প্রমাণ কর $\log_e(x+1)>x-\frac{x^2}{2}$

29. দেখাও যে

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x} = 1$$

30. প্রমাণ কর—

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1$$

31. যদি $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ সসীম হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর এবং সীমাটি নির্ণয় কর। [উত্তর $a = 2$; সীমা $= 1$]

32. প্রমাণ কর

$$\lim_{x \to 0} \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{6}$$

অষ্টম অধ্যায়

ফাংশনের পরম ও অবম মান

8.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

আলোচ্য অধ্যায়ে আমরা একচলবিশিষ্ট ফাংশনের পরম (greatest বা maximum) এবং অবম (least বা minimum) মান সম্বন্ধে আলোচনা করবো। ফাংশনের নিরপেক্ষ চলের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে ফাংশনের মানের পরিবর্তন হয় এবং এই পরিবর্তনের ফলে ফাংশনের পরম বা অবম মানের সম্ভাবনা থাকতে পারে। ফাংশনের প্রকৃতি বুঝতে হলে ফাংশনের নিরপেক্ষ চলের সব মান বসিয়ে ফাংশনের প্রকৃতি আলোচনা করা অসম্ভব ; সেজন্য কলনবিদ্যায় ফাংশনের পরম বা অবম মানের অস্তিত্বের জন্য কিছু তত্ত্বের প্রয়োজন। প্রাককলনবিদ্যায় যথা বীজগণিতের আলোচনায় আমরা দেখেছি ax^2+bx+c একটি দ্বিঘাত রাশি এবং a ধনাত্মক হলে এই রাশির কোন পরম মান নাই, কিন্তু রাশির একটি অবম মান আছে। আবার a ঋণাত্মক হলে এই রাশির কোন অবম মান নাই, কিন্তু রাশির একটি পরম মান আছে। এখন কলনবিদ্যায় ax^2+bx+c রাশিটি একটি একচলবিশিষ্ট ফাংশন যেখানে a, b, c তিনটি ধ্রুবক ; অতএব এরূপ ফাংশনের চরম মানের (অর্থাৎ পরম মান বা অবম মান) ধারণা পাওয়া যাচ্ছে। পুনরায় আমরা জানি $\dfrac{x\ -3x+4}{x^2+3x+4}$ রাশিটির বা ফাংশনটির ক্ষেত্রে x এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য নিম্নলিখিত সম্বন্ধটি সিদ্ধ :—

$$\frac{1}{7} \leqslant \frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4} \leqslant 7 ;$$

সুতরাং এই রাশিটির অবম মান $\frac{1}{7}$ এবং পরম মান 7

কিন্তু $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ রাশিটি 5 এবং 9 এর মধ্যে থাকতে পারে না অর্থাৎ

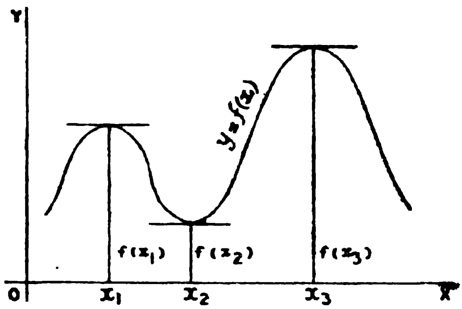
$\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7} \leqslant 5$ এবং $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7} \geqslant 9$;

সুতরাং এই ফাংশনটির কোন চরম মান নাই।

উপরোক্ত ফাংশনগুলির ক্ষেত্রে যে চরম মানের কথা বলা হল তা বাস্তব x এর সব

মানের জন্য—তাই এই সব চরম মান হলো **সার্বভৌম চরম মান** (absolute extremum)। কিন্তু সাধারণ ফাংশনের ক্ষেত্রে এরূপ সার্বভৌম চরম মান পাওয়া সম্ভব নয়, সেজন্য সাধারণ ফাংশনের ক্ষেত্রে আপেক্ষিক চরম মান (relative extremum) আলোচনা করা প্রয়োজন। সুতরাং সাধারণ ফাংশনের ক্ষেত্রে অনেকগুলি চরম মান থাকতে পারে, কাজেই সেই চরম মান ফাংশনের বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম মান বোঝায় না। মনে কর কোন ফাংশনের নিম্নলিখিত লেখচিত্র পাওয়া গেছে :—

লেখচিত্রে দেখা যায় যে $x=x_1$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির একটি পরম মান আছে অর্থাৎ x_1 এর অঞ্চলে $f(x_1)$ একটি পরম মান, সুতরাং ইহা একটি আপেক্ষিক পরম মান।



আবার $x=x_2$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির একটি অবম মান আছে অর্থাৎ x_2 এর অঞ্চলে $f(x_2)$ একটি অবম মান; সুতরাং ইহাও একটি আপেক্ষিক অবম মান। এইরূপে $f(x_3)$ একটি আপেক্ষিক পরম মান।

লেখচিত্র থেকে আরও লক্ষ্য করা যেতে পারে যে ফাংশনটি যেখানে চরম মাণ গ্রহণ করেছে, যেমন $(x_1, f(x_1))$ বিন্দুতে, সেখানে বক্ররেখার স্পর্শক X-অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ $f'(x_1)=0$; কিন্তু তাই বলে $f'(x)=0$ এর x এর সব মানের জন্য যে ফাংশনের পরম মান থাকবে এ ধারণা করে নেওয়া ঠিক হবে না; আবার ফাংশনের পরম মান থাকলেই যে $f'(x)=0$ হবে এ কথাও ঠিক নয়। এই সব তত্ত্বের বিস্তৃত আলোচনা এ অধ্যায়ে করা হবে।

ফাংশনের পরম বা অবম মান নির্ধারণ প্রয়োগের ক্ষেত্রে খুবই প্রয়োজনীয়। উদাহরণস্বরূপ আমরা জানি একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত সবচেয়ে বড় ক্ষেত্রফলের আয়তক্ষেত্র একটি বর্গক্ষেত্র; একটি বৃত্তের মধ্যে সবচেয়ে বড় ক্ষেত্রফলের অন্তর্লিখিত ত্রিভুজ একটি সমবাহু ত্রিভুজ; এই সব উদাহরণ কলনবিদ্যার সাহায্যে সমাধান করা যেতে পারে।

8.02 ফাংশনের পরম মান ও অবম মানের সংজ্ঞা ঃ

মনে কর $f(x)$ ফাংশনটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞিত এবং $\alpha \in (a, b)$। এখন $f(x)$ এর মান α বিন্দুতে **পরম** বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করতে পারি যে α ব্যতীত $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(\alpha) > f(x)$ অর্থাৎ

(1) $\cdots\cdots\cdots f(\alpha + h) - f(\alpha) < 0$, যখন $0 < |h| < \delta$.

অনুরূপভাবে $f(x)$ এর মান α বিন্দুতে **অবম** বলা হয় যদি আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করতে পারি যে α ব্যতীত $\alpha - \delta < x < \alpha + \delta$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য $f(\alpha) < f(x)$ অর্থাৎ

(2) $\cdots\cdots\cdots f(\alpha + h) - f(\alpha) > 0$, যখন $0 < |h| < \delta$.

(1) থেকে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে $f(\alpha)$ পরম মান যদি

(3) $\cdots\cdots\cdots h\{f(\alpha + h) - f(\alpha)\} < 0$ অথবা > 0,

যখন যথাক্রমে $h > 0$ অথবা < 0.

অনুরূপভাবে (2) থেকে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে $f(\alpha)$ অবম মান যদি

(4) $\cdots\cdots\cdots h\{f(\alpha + h) - f(\alpha)\} > 0$ অথবা < 0,

যখন যথাক্রমে $h > 0$ অথবা < 0.

মন্তব্য ঃ যখন $x = \alpha$ বিন্দুতে $f(x)$ এর পরম মান $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্তবিন্দুর সমান তখন $f(\alpha)$ ফাংসনের সার্বভৌম পরম মান।

পুনরায় যখন $x = \alpha$ বিন্দুতে $f(x)$ এর অবম মান $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ নিম্ন প্রান্তবিন্দুর সমান তখন $f(\alpha)$ ফাংশনের সার্বভৌম অবম মান।

উদাহরণ 1. মনে কর $y = x^4$; এই ফাংশনটির অবম মান আছে $x = 0$ বিন্দুতে, কারণ যখন $x = 0$, তখন $y = 0$ এবং অন্য সকল x এর মানের জন্য $y > 0$। অতএব এই অবম মান সার্বভৌম।

উদাহরণ 2. মনে কর

$$f(x) = x, \text{ যখন } 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}$$
$$= 1 - x, \text{ যখন } \tfrac{1}{2} < x \leqslant 1$$

এখানে $f(x)$ এর একটি পরম মান আছে $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে।

8.03 অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের আবশ্যকীয় সর্ত :

উপপাদ্য 1 : যদি কোন ফাংশন $f(x)$ বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ তে অবিচ্ছিন্ন থাকে এবং $x=\alpha \in (a, b)$ এই বিন্দুতে ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্ব থাকে এবং $f'(\alpha)$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে $f'(\alpha)=0$ হবে।

প্রমাণ :—

যদি সম্ভব হয় মনে কর $f'(\alpha)\neq 0$; তাহলে

$$f'(\alpha)>0 \text{ অথবা } <0$$

প্রথমে মনে কর $f'(\alpha)>0$; এখন আমরা জানি $f'(\alpha)>0$ হলে $f(x)$ ফাংশনটি $x=\alpha$ বিন্দুতে আরোহী ; সুতরাং

$$h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}>0,\ 0<|h|<\delta$$

8.02 অনুচ্ছেদের (3) এবং (4) থেকে সহজেই দেখা যায় $f(x)$ এর কোন পরম বা অবম মান $x=\alpha$ বিন্দুতে থাকতে পারে না। ইহা অসম্ভব ; সুতরাং $f'(\alpha)\not>0$.

এবার মনে কর $f'(\alpha)<0$; এখন আমরা জানি $f'(\alpha)<0$ হলে $f(x)$ ফাংশনটি $x=\alpha$ বিন্দুতে অবরোহী ; সুতরাং

$$h\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}<0,\ 0<|h|<\delta$$

8.02 অনুচ্ছেদের (3) এবং (4) থেকে সহজেই দেখা যায় $f(x)$ এর কোন পরম বা অবম মান $x=\alpha$ বিন্দুতে থাকতে পারে না। ইহা অসম্ভব ; সুতরাং $f'(\alpha)\not<0$.

অতএব উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী $f'(\alpha)=0$ হবেই।

মন্তব্য : (1) উপপাদ্য 1 এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা হিসাবে বলা যেতে পারে যে যদি চরম মানের বিন্দুগুলিতে $f(x)$ এর অন্তরকলজ বিদ্যমান থাকে, তবে $y=f(x)$ এর লেখাচিত্রের সেই বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষরেখার সমান্তরাল হবে।

(2) উপপাদ্য 1 এর সর্তটি অর্থাৎ $f'(\alpha)=0$ অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্বের জন্য আবশ্যকীয় সর্ত, কিন্তু এই সর্ত পর্য্যাপ্ত নয়। অর্থাৎ অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের চরম মান যদি থাকে তবে $f'(x)=0$ এর বীজগুলিতে থাকবে, এই বীজগুলির বাহিরের কোন বিন্দুতে ফাংশনের চরম মান থাকবে না এবং $f'(x)=0$ এর বীজগুলির সব বিন্দুতেই ফাংশনের চরম মান নাও থাকতে পারে।

8.04 অন্তরকলনীয় ফাংশনের চরম মানের পর্য্যাপ্ত সর্ত :

উপপাদ্য 2 : যদি $f(x)$ ফাংশনটি α বিন্দুর একটি অঞ্চলে সংজ্ঞিত হয় এবং যদি এমন কোন অন্তরাল থাকে যার একটি প্রান্তিক বিন্দু α এবং অপর প্রান্তিক বিন্দু

ঐ অঞ্চলের যে কোন একটি বিন্দু, যেখানে ল্যাগরাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $f(\alpha)$ এর মান (i) পরম যদি $f'(x)>0$, যখন $x<\alpha$ (ঐ অঞ্চলে)
এবং $f'(x)<0$, যখন $x>\alpha$ (ঐ অঞ্চলে)

(ii) অবম যদি $f'(x)<0$, যখন $x<\alpha$ (ঐ অঞ্চলে)
এবং $f'(x)>0$, যখন $x>\alpha$ (ঐ অঞ্চলে)

প্রমাণ ঃ—

মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)\,f'(\xi),$$

যেখানে ξ সংখ্যাটি α এবং x এর মধ্যবর্তী।

এখন মনে করি $x<\alpha$, তাহলে $\xi<\alpha$, $f'(\xi)>0$

$$\therefore\quad (x-\alpha)\,f'(\xi)<0$$

সুতরাং $f(x)-f(\alpha)<0$

অর্থাৎ $f(x)<f(\alpha)$ (1)

পুনরায় মনে করি $x>\alpha$, তাহলে $\xi>\alpha$, $f'(\xi)<0$

$$\therefore\quad (x-\alpha)\,f'(\xi)<0$$

সুতরাং $f(x)-f(\alpha)<0$

অর্থাৎ $f(x)<f(\alpha)$ (2)

(1) এবং (2) থেকে সহজেই বুঝা যায় যে $x=\alpha$ বিন্দুতে $f(x)$ এর পরম মান আছে।

অনুরূপভাবে (ii) অংশটি প্রমাণ করা যেতে পারে।

উদাহরণ 1. মনে কর $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$

প্রথমে $\dfrac{dy}{dx}=x^2-4x+3$

পরে $\dfrac{dy}{dx}=0$ সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যায়

$x=1,\ 3$

এখন এই দুইটি বিন্দুতে ($\alpha=1$ এবং $\beta=3$) চরম মানের অস্তিত্বের পর্যাপ্ত সর্ত পরীক্ষা করতে হবে।

1) $\alpha = 1$

এখানে লক্ষ্য কর $y' = (x-1)(x-3)$

$\therefore \quad y' = (-)\cdot(-) > 0,$ যখন $x < 1$

এবং $\quad y' = (+)\cdot(-) < 0,$ যখন $x > 1$

উপপাদ্য 2 অনুসারে $f(x)$ এর $x = 1$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে এবং এই পরম মান

$$(y)_{x=1} = \tfrac{7}{3}.$$

2) $\alpha = 3$

এখানে লক্ষ্য কর

$y' = (+)\cdot(-) < 0,$ যখন $x < 3$

এবং $\quad y' = (+)\cdot(+) > 0,$ যখন $x > 3$

উপপাদ্য 2 অনুসারে $f(x)$ এর $x = 3$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে এবং এই অবম মান

$$(y)_{x=3} = 1$$

উদাহরণ 2. মনে কর $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

এখানে $y' = 5x^2(x-1)(x-3)$

$\therefore \quad y' = 0$ থেকে পাওয়া যায় $x = 0,\ 1,\ 3$

উপপাদ্য 2 এর সাহায্যে দেখানো যেতে পারে যে y এর $x = 1$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে, $x = 3$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে, কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে কোন চরম মান নাই।

উদাহরণ 3. মনে কর $y = x^3$

এখানে $y' = 3x^2$

$\therefore \quad y' = 0$ থেকে পাওয়া যায় $x = 0$

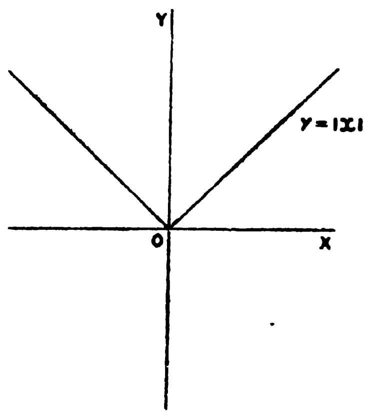
এখন $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনের কোন চরম মান নাই : কারণ

$y' > 0,$ যখন $x < 0$

এবং $\quad y' > 0,$ যখন $x > 0.$

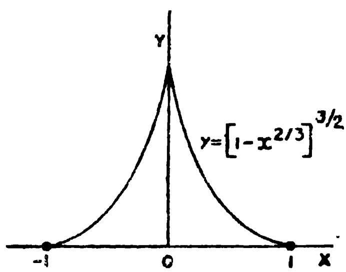
উদাহরণ 4. মনে কর $y = |x|$

এই ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের কোন অস্তিত্ব নাই। কিন্তু $x=0$ বিন্দুতে ফাংশনের একটি অবম মান (যাহা শূন্য) আছে, কারণ $y=0$ যখন $x=0$ $y > 0$ যখন $x \neq 0$.



উদাহরণ 5. মনে কর $y=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের কোন অস্তিত্ব নাই, কারণ $y' = -(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}/x^{\frac{1}{3}}$, সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজের কোন সান্ত অস্তিত্ব নাই। এরূপ ক্ষেত্রে অর্থাৎ $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলজ-ফাংশনটিকে বিচ্ছিন্ন বলা হয়। কিন্তু ফাংশনটির $x=0$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে, কারণ $f(0)=1$ এবং $f(x) < 1$ যখন $x \neq 0$.



সংজ্ঞা ঃ $f(x)$ ফাংশনটির যে সকল x বিন্দুতে অন্তরকলজ শূন্য বা বিচ্ছিন্ন হয় সে সকল বিন্দুকে **সঙ্কট বিন্দু** (critical points) বলা হয়।

মন্তব্য :

অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের প্রথম অন্তরকলজের সাহায্যে চরম মান নির্ণয় করার পদ্ধতি :—

উপপাদ্য 1 এবং 2 থেকে আমরা অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের প্রথম অন্তরকলজের সাহায্যে চরম মান নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতি পাই :

(1) প্রথমে $f'(x)$ নির্ণয় করতে হবে

(2) x এর সঙ্কট মানগুলি বাহির করার জন্য $f'(x)=0$ সমীকরণটি সমাধান করতে হবে

(3) সঙ্কট মানগুলির (α) জন্য $f'(x)$ ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন হতে পারে, কিন্তু যদি $f'(x) > 0$ যখন $x < \alpha$ এবং $f'(x) < 0$ যখন $x > \alpha$ হয় তবে $f(\alpha)$ একটি পরম মান। আবার যদি $f'(x) < 0$ যখন $x < \alpha$ এবং $f'(x) > 0$ যখন $x > \alpha$ হয় তবে $f(\alpha)$ একটি অবম মান। পুনরায় $f'(x) > 0$ যখন $x \lesseqgtr \alpha$ অথবা $f'(x) < 0$ যখন $x \gtrless \alpha$, এখন $f(\alpha)$ কোন পরম মান নয়।

8.05 উচ্চপর্য্যায় অন্তরকলজের সাহায্যে ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্বের আলোচনা

উপপাদ্য 3. $f(x)$ ফাংশনটি যে অন্তরালে সংজ্ঞিত সেই অন্তরালের অন্তবর্তী α এমন একটি বিন্দু যদি থাকে যেখানে $f'(\alpha)=0$ কিন্তু $f''(\alpha)\neq 0$, তাহলে $f(\alpha)$ এর মান (i) পরম হবে যদি $f''(\alpha) < 0$ হয় এবং (ii) অবম হবে যদি $f''(\alpha) > 0$ হয়। ($f''(x)$ ফাংশনটি ঐ অন্তরালে অবিচ্ছিন্ন মনে কর)

প্রমাণ :

উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী $f'(\alpha)=0$ এবং $f''(\alpha)$ এর অস্তিত্ব বর্তমান এবং $f''(\alpha)\neq 0$.

যেহেতু $f''(\alpha)\neq 0$, একটি ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এমন ধরা যেতে পারে যাতে

$$f''(\alpha)-\epsilon \text{ এবং } f''(\alpha)+\epsilon$$

রাশি দুইটির $f''(\alpha)$ মানের সহিত একই চিহ্ন থাকবে।

এখন $f''(x)$ ফাংশনটি $x=\alpha$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলে একটি অঞ্চল $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ ধরা যেতে পারে যাতে

(i) $f''(\alpha)-\epsilon < f''(\alpha+h) < f''(\alpha)+\epsilon, \quad 0 \leqslant |h| < \delta.$

মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=hf'(\alpha)+\frac{h^2}{2!}f''(\alpha+\theta h)\,;\; 0<\theta<1$$

(ii) $\therefore\ f(\alpha+h)-f(\alpha)=\frac{h^2}{2!}f''(\alpha+\theta h)$, যেহেতু $f'(\alpha)=0$

এখন (i) থেকে পাওরা যায়

(iii) $f''(\alpha)-\epsilon < f''(\alpha+\theta h) < f''(\alpha)+\epsilon$

সুতরাং $f''(\alpha+\theta h)$ রাশির $f''(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন থাকবে।

যেহেতু h^2 ধনাত্মক, সেহেতু $\frac{h^2}{2!}f''(\alpha+\theta h)$ রাশিটির $f''(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন।

$\therefore$ (ii) থেকে দেখা যায় যে $f(\alpha+h)-f(\alpha)$ রাশির $f''(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন (h ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে)।

কিন্তু $f''(\alpha)\neq 0$, অতএব $f''(\alpha)>0$ অথবা <0

যখন $f''(\alpha)<0$, তখন $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$, অতএব এক্ষেত্রে $f(x)$এর $x=\alpha$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

পুনরায় যখন $f''(\alpha)>0$, তখন $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$, অতএব এক্ষেত্রে $f(x)$ এর $x=\alpha$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে।

উদাহরণ ঃ মনে কর $f(x)=2\sin x+\cos 2x$

এখানে লক্ষ্য করা উচিত যে $\sin(2\pi+x)=\sin x$ এবং $\cos(2\pi+x)=\cos x$

$\therefore\ f(x+2\pi)=f(x)$

সুতরাং ফাংশনটির $[0, 2\pi]$ বদ্ধ অন্তরালে চরম মান আলোচনা করলেই যথেষ্ট হবে।

$$\begin{aligned}\text{এখন } f'(x) &= 2\cos x-2\sin 2x\\ &= 2(\cos x-2\sin x\cos x)\\ &= 2\cos x(1-2\sin x)\end{aligned}$$

ফাংশনটির চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় সর্ত

$$f'(x)=0$$

অর্থাৎ $\cos x=0$ অথবা $\sin x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{2}$

$[0, 2\pi]$ অন্তরালে সমীকরণটির বীজগুলি $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ এবং $\frac{3\pi}{2}$

এখন $f''(x) = -2 \sin x - 4 \cos 2x$

$x = \pi/6$ বিন্দুতে ফাংশনটির চরম মানের অস্তিত্বের পরীক্ষা করা যাক।

$$f''(x) \mid_{x=\pi/6} = -2 \cdot \tfrac{1}{2} - 4 \cdot \tfrac{1}{2} = -3 < 0 ;$$

সুতরাং $x = \pi/6$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি পরম মান আছে এবং এই পরম মান $= [f(x)]_{x=\pi/6} = -2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

এইভাবে লক্ষ্য করা যেতে পারে $x = \pi/2$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি অবম মান আছে এবং এই অবম মান $= [f(x)]_{x=\pi/2} = 1$

$x = \dfrac{5\pi}{6}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি পরম মান আছে এবং এই পরম মান $\dfrac{3}{2}$;

সবশেষে $x = \dfrac{3\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি অবম মান আছে এবং এই অবম মান -3.

মন্তব্য : ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করার জন্য উপপাদ্য 2 এর চেয়েও উপপাদ্য 3 খুবই সুবিধাজনক।

উপপাদ্য 4 যদি একটি ফাংশন $f(x)$ এর (a, b) অন্তরালে n তম অবিচ্ছিন্ন অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে এবং

$$f^{(r)}(\alpha) = 0 \; ; \; r = 1, 2, \cdots (n-1)$$

$$\text{এবং } f^{(n)}(\alpha) \neq 0,$$

যেখানে $\alpha \in (a, b)$,

তাহলে $f(x)$ এর $x = \alpha$ বিন্দুতে চরম মান থাকবে যদি n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $f(x)$ এর $x = \alpha$ বিন্দুতে কোন চরম মানের অস্তিত্ব থাকবে না যদি n বিযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয়। প্রথম ক্ষেত্রে $f(\alpha)$ এর মান (i) পরম হবে যদি $f^{(n)}(\alpha) < 0$ হয় এবং (ii) অবম হবে যদি $f^{(n)}(\alpha) > 0$ হয়।

প্রমাণ :

যেহেতু $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$, একটি ধনাত্মক সংখ্যা ϵ এমন ধরা যেতে পারে যাতে

$$f^{(n)}(\alpha) - \epsilon \text{ এবং } f^{(n)}(\alpha) + \epsilon$$

রাশি দুইটির $f^{(n)}(\alpha)$ মানের সহিত একই চিহ্ন থাকবে।

এখন $f^{(n)}(x)$ ফাংশনটি $x = \alpha$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলে একটি অঞ্চল $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ ধরা যেতে পারে যাতে

(i) $f^{(n)}(\alpha) - \epsilon < f^{(n)}(\alpha + h) < f^{(n)}(\alpha) + \epsilon, \; 0 \leqslant |h| < \delta.$

টেলরের উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$f(\alpha + h) - f(\alpha)$$

$$= hf'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\alpha) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \theta h),$$

$$(0 < \theta < 1)$$

$\therefore$

(ii) $f(\alpha + h) - f(\alpha) = \dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \theta h),$

যেহেতু $f^{(r)}(\alpha) = 0 \; ; \; r = 1, 2, \cdots (n-1)$

এখন (i) থেকে পাওয়া যায়

(iii) $f^{(n)}(\alpha) - \epsilon < f^{(n)}(\alpha + \theta h) < f^{(n)}(\alpha) + \epsilon$

সুতরাং $f^{(n)}(\alpha + \theta h)$ রাশির $f^{(n)}(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন থাকবে।

প্রথম অবস্থা : মনে করি n একটি যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা।

এখানে h^n ধনাত্মক, সুতরাং $\dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \theta h)$ রাশির $f^{(n)}(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন বর্তমান।

অতএব (ii) থেকে দেখা যায় যে $f(\alpha + h) - f(\alpha)$ রাশির $f^{(n)}(\alpha)$ এর মানের সহিত একই চিহ্ন (n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে)।

কিন্তু $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$, অতএব $f^{(n)}(\alpha) > 0$ অথবা < 0.

যখন $f^{(n)}(\alpha) < 0$, তখন $f(\alpha + h) - f(\alpha) < 0$, অতএব এক্ষেত্রে $f(x)$ এর $x = \alpha$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

পুনরায় যখন $f^{(n)}(\alpha) > 0$, তখন $f(\alpha + h) - f(\alpha) > 0$, অতএব এক্ষেত্রে $f(x)$ এর $x = \alpha$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে।

দ্বিতীয় অবস্থা : মনে করি n একটি বিযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা

এখানে $\dfrac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha + \theta h)$ রাশিটি একই চিহ্ন বজায় রাখে না, কারণ h^n একই চিহ্ন বজায় রাখে না। অতএব (ii) থেকে দেখা যায় যে, যখন $0 < |h| < \delta$. $f(\alpha + h) - f(\alpha)$ একই চিহ্ন বজায় রাখে না।

সুতরাং এই অবস্থায় $x = \alpha$ বিন্দুতে $f(x)$ এর চরম মান নাই।

উদাহরণ : মনে কর $f(x)=(x-1)^3$

এখানে $f'(x)=3(x-1)^2$

$\therefore$ চরম মানের আবশ্যকীয় সর্তের জন্য

$$f'(x)=0$$

অর্থাৎ $x=1$

এখন $f'(1)=f''(1)=0$

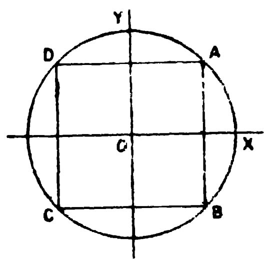
কিন্তু $f'''(1)=6\neq 0$

অতএব উপপাদ্য 4 অনুযায়ী দেখা যায় $f(x)$ এর $x=1$ বিন্দুতে কোন চরম মানের অস্তিত্ব নাই।

মন্তব্য : অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনের চরম মান নির্ণয় করার জন্য উপপাদ্য 4 সবচেয়ে বেশী সুবিধাজনক।

বিশেষ উদাহরণ

1. দেখাও যে একটি বৃত্তের মধ্যে অন্তর্লিখিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম করতে হলে উহাকে বর্গক্ষেত্র হতে হবে।



উত্তর :—

মনে কর বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2=a^2$$

অতএব বৃত্তের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$

এখন $AB=2a\sin\alpha$

$CB=2a\cos\alpha$

এখন $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $=AB\cdot CB$

$$=2a\sin\alpha\cdot 2a\cos\alpha$$

$$=2a^2\sin 2\alpha$$

বৃহত্তম ক্ষেত্রফলের আবশ্যকীয় সর্ত

$$\frac{d}{d\alpha}(2a^2 \sin 2\alpha) = 0$$

অর্থাৎ $4a^2 \cdot \cos 2\alpha = 0$

অর্থাৎ $\cos 2\alpha = 0$

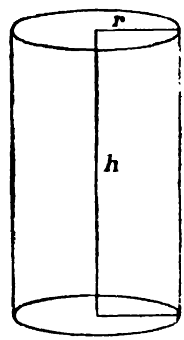
$\therefore \quad 2\alpha = \pi/2$

সুতরাং $\alpha = \pi/4$; α এর এই মানের জন্য $AB = 2a \sin \alpha = a\sqrt{2}$ এবং $BC = 2a \cos \alpha = a\sqrt{2}$

$\therefore \quad AB = BC$

সুতরাং $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হতে হলে $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র হবে।

2. মনে কর একখণ্ড টিনের পাত থেকে বৃহত্তম ঘনফলের একটি লম্ব বৃত্তাকার



চোঙ তৈয়ারী করতে হবে।

একখণ্ড টিনের পাত দেওয়া আছে এবং একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ (যার মুখ খোলা) তৈয়ারী করা হল যার ব্যাসার্ধ $= r$ এবং উচ্চতা $= h$

এখন $S = 2\pi rh + \pi r^2$ এই পরিমাণ টিন দেওয়া ছিল।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ঘণফল $= \pi r^2 h = V$ (মনে করি)

এখন $\quad V = \pi r^2 \left(\frac{S - \pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{Sr - \pi r^3}{2}$

V এর চরম মানের আবশ্যকীয় সর্ত

$$\frac{dV}{dr} = 0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad \frac{S-3\pi r^2}{2}=0$$

$$\therefore \quad r=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

এখন $\dfrac{d^2V}{dr^2}=-3\pi r<0,$ যখন $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$

$\therefore$ V বৃহত্তম হবে যখন $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$

এখন $h=\dfrac{S-\pi r^2}{2\pi r}=\dfrac{S-\pi\cdot\dfrac{S}{3\pi}}{2\pi\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}}=S\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3\pi}{S}}$

$$=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}=r$$

অতএব প্রদত্ত টিনের পাত থেকে বৃহত্তম লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈয়ারী করতে হলে ঐ চোঙের উচ্চতা ব্যাসার্দ্ধের সমান করে তৈয়ারী করতে হবে।

3. প্রমাণ কর $e^x>1+x,$ যখন $x\neq 0$

উত্তর ঃ মনে কর $f(x)=e^x-(1+x)$

এখানে $f'(x)=e^x-1$

$\therefore$ $f(x)$ এর চরম মানের আবশ্যকীয় সর্ত

$$f'(x)=0$$

$$\text{অর্থাৎ} \quad e^x=1$$

$$\therefore \quad x=0$$

এখন $f''(x)=e^x$ এবং $f''(0)=1>0$

অতএব $f(x)$ এর অবম মান $f(0)=0,$ এই অবম মান সার্বভৌম।

সুতরাং $f(x)>f(0)$ যখন $x\neq 0$

অর্থাৎ $e^x-(1+x)>0$

অর্থাৎ $e^x>1+x.$

4. নিম্নলিখিত বক্ররেখার কোন্ বিন্দুতে প্রবণতা (gradient) অবম তা নির্ণয় কর ঃ—

$$x=2t^2-1$$
$$y=3t^3+t$$

উত্তর ঃ

বক্ররেখার প্রবণতা $(m)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{9t^2+1}{4t}=\dfrac{9}{4}\,t+\dfrac{1}{4t}$

প্রবণতার চরম মানের আবশ্যকীয় সর্ত

$$\frac{dm}{dt}=0$$

অর্থাৎ $$\frac{9}{4}-\frac{1}{4t^2}=0$$

$$\therefore\quad t=\pm\tfrac{1}{3}$$

যখন $t=\frac{1}{3}$, তখন $\dfrac{d^2m}{dt^2}>0$ এবং যখন $t=-\frac{1}{3}$, তখন $\dfrac{d^2m}{dt^2}<0.$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $=(2\cdot\frac{1}{9}-1,\ 3\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{3})$

$=(-\frac{7}{9},\ \frac{4}{9})$

বিবিধ অনুশীলনী 8

1. $f(x)$ ফাংশনের পরম এবং অবম মান বলতে কি বুঝায় ? কোন অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরকলনযোগ্য ফাংশন $f(x)$ এর $x=a$ বিন্দুতে যদি পরম কিংবা অবম মান থাকে, এগুলি কি প্রকারে নির্ধারণ করা যায় তা বিশদভাবে বিবৃত কর।

2. $f(x)=xe^{-2x}$ এর চরম মান কি হবে পরীক্ষা কর। $\left[\text{পরম মান}=\dfrac{1}{2e}\right]$

3. $f(x)=\sin x+\cos x$ এর পরম মান নির্ণয় কর। $[\sqrt{2}]$

3. $f(x)=x+\dfrac{2}{x}-\log x$ এর অবম মান নির্ণয় কর। $[3-\log 2]$

5. $f(x)=x(1-x^2)$ এর পরম মান নির্ণয় কর। $\left[\dfrac{2}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}\right]$

6. দেখাও যে $x^5-5x^4+5x^3-1$ এর $x=1$ বিন্দুতে একটি পরম মান এবং $x=3$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে।

7. একটি রম্বসের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। দেখাও যে ইহার ক্ষেত্রফলকে বৃহত্তম করতে হলে ইহাকে একটি বর্গক্ষেত্র হতে হবে।

8. প্রমাণ কর $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$, যখন $x>0$

9. প্রমাণ কর $x+\frac{1}{x} \geqslant 2$, যখন $x>0$

10. দেখাও যে $\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}$ এর পরম মান $\frac{4}{27a^4}$.

11. প্রমাণ কর $y=\frac{x}{\log x}$ এর $x=e$ বিন্দুতে একটি অবম মান আছে।

12. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ এর পরম মান কোন বিন্দুতে আছে? [$x=e$]

13. দেখাও যে $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$ এর মান পরম যখন $x=\frac{a^2}{a-b}$ এবং অবম যখন $x=\frac{a^2}{a+b}$.

14. P উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। উপবৃত্তের কেন্দ্র C; P বিন্দুতে স্পর্শকের উপর C বিন্দু থেকে অঙ্কিত অভিলম্বের পাদবিন্দু N; PN এর পরম মান নির্ণয় কর। [(অর্ধ-পরাক্ষ) – অর্ধ-উপাক্ষ)]

15. দেখাও যে $\sin x(1+\cos x)$এর $x=\pi/3$ বিন্দুতে একটি পরম মান আছে।

16. নিম্নলিখিত ফাংশনটির $\theta=\pi$ বিন্দুতে দেখাও যে একটি পরম মান আছে ঃ

$$x=a(\theta-\sin\theta)$$
$$y=a(1-\cos\theta)$$

17. অন্তরকলনযোগ্য $f(x)$ ফাংশনের চরম মানের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় সর্ত উল্লেখ কর এবং প্রমাণ কর। একটি উদাহরণ দ্বারা বুঝিয়ে দাও ফাংশনের কোন বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব না থাকা সত্ত্বেও ফাংশনের চরম মান থাকতে পারে।

18. $y=ae^{x/a}-3x-2ae^{-x/a}$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

[পরম মান $=-a$

অবম মান $=a(1-3\log 2)$]

19. $y=\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ এর চরম মান নির্ণয় কর।

[অবম মান $=\frac{1}{7}$; পরম মান $=7$]

20. $y=\frac{\sin x}{\sqrt{(1+4\sin x)}}$ হলে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x(1+2\sin x)}{(1+4\sin x)^{3/2}};$$

এখন প্রমাণ কর y এর পরম মান $\frac{1}{\sqrt{5}}$, যখন $x=\frac{(4n+1)}{2}\pi$.

21. (i) $xy = 4$ হলে $4x + 9y$ এর পরম এবং অবম মান নির্ণয় কর।

[পরম মান $= -24$, অবম মান $= 24$]

[সংকেত : $4x + 9y = 4\left(x + \frac{9}{x}\right) \equiv f(x)$]

(ii) $2x + 3y = 4$ হলে xy এর পরম অথবা অবম মান নির্ণয় কর।

[পরম মান = ২/৪]

[সংকেত : $xy = x\left(\frac{4 - 2x}{3}\right) \equiv f(x)$]

22. দেখাও যে নির্দিষ্ট পরিসীমা বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে যখন উহা বর্গাকৃতি হবে।

নবম অধ্যায়

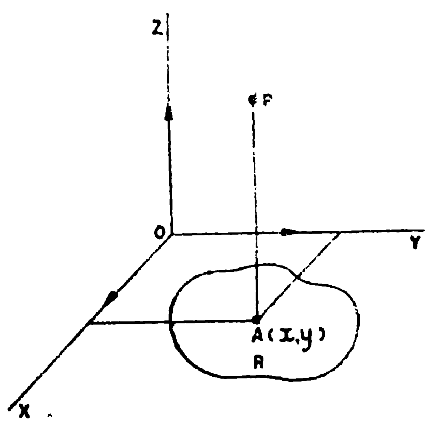
একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশন

9.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

চতুর্থ অধ্যায়ে আমরা একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশন (function of several variables) এর ধারণা সাধারণভাবে এবং উদাহরণের সাহায্যে আলোচনা করেছি। আলোচনার সুবিধার জন্য অনেক সময় বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের পরিবর্তে দুই বা তিন চলবিশিষ্ট ফাংশন নিলে সহজবোধ্য হয় এবং পরে ধারণাগুলিকে সামান্যীকরণ করা যায়। চতুর্থ অধ্যায়ে একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের সীমা ও অবিচ্ছন্নতা সম্পর্কে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশন বিজ্ঞানের বা যে কোন বিষয়ের গাণিতিক আলোচনায় খুব প্রয়োজনীয়। যেমন আমরা জানি কিছু পরিমাণ গ্যাসীয় পদার্থের আয়তন, চাপ ও উষ্ণতার উপর নির্ভরশীল ; সুতরাং গ্যাসের আয়তন, চাপ ও উষ্ণতা এই দুই নিরপেক্ষ চলের ফাংশন। আবার আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ এই তিন নিরপেক্ষ চলের ফাংশন।

এখন মনে করি $z=f(x, y)$ একমান বিশিষ্ট (single valued) একটি ফাংশন এবং এই ফাংশন X-Y সমতলের কোন অঞ্চল R এ সংজ্ঞিত। তাহলে



R এ কোন বাস্তব সংখ্যা যুগল (x, y) এর জন্য X-Y সমতলে একটি বিন্দু A পাওয়া যাবে। A বিন্দুতে X-Y সমতলের উপর AP লম্ব টানা হল, এখন এই

লম্ব থেকে $z=f(x, y)$ পরিমাণ দৈর্ঘ্য যদি AP হয়, তাহলে ত্রিমাত্রিক দেশে P একটি বিন্দু পাওয়া গেল, যার স্থানাঙ্ক $(x, y, z)=(x, y, f(x, y))$.

এই P বিন্দুর সঞ্চার পথই $z=f(x, y)$ এই ফাংশনের জ্যামিতিক রূপায়ণ।

একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের সীমা আলোচনাকালে আমরা লক্ষ্য করেছি একচলবিশিষ্ট ফাংশনের সীমা থেকে উহার সামান্যীকরণ হলেও একটু বিশদ আলোচনা সাপেক্ষ। যখনই গাণিতিক কোন ধারণার সামান্যীকরণ করা হয় তখনই আলোচনা খুব নিখুঁতভাবে করতে হয়। যেমন $x \to a$ বললে ধারণাটি যত সহজ, $(x, y) \to (a, b)$ বললে ধারণাটি অতটা সহজ নয়। (x, y) বাস্তব চলযুগল যখন (a, b) নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যাযুগলের অভিমুখী, তখন X-Y সমতলে (x, y) বিন্দুর সর্বপ্রকার অভিমুখের কথা চিন্তা করতে হয়। চতুর্থ অধ্যায়ে দেখা গিয়েছে এই সীমার আলোচনায় দ্বিসীমা এবং পুনরাবৃত্ত সীমার কথা এসেছিল। একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতাও অনুরূপভাবে একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সামান্যীকরণ। দুই-চলবিশিষ্ট ফাংশন $f(x, y)$ কে (a, b) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি দ্বিসীমা

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$$

এর অস্তিত্ব থাকে এবং এই দ্বিসীমা $f(a, b)$ এর সমান হয়। এই সংজ্ঞার অন্যরূপ বিবৃতি হিসেবে বলা যায় $f(x, y)$ ফাংশনকে (a, b) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি যে কোন ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ϵ এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ নির্ণয় করা যেতে পারে যাতে নিম্নলিখিত অসমতাটি সিদ্ধ হয়ঃ

$$|f(x, y)-f(a, b)| < \epsilon\,;\; 0 \leqslant |x-a| < \delta \text{ এবং } 0 \leqslant |y-b| < \delta.$$

বর্তমান অধ্যায়ে আমরা একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলন সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করবো। একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলন সম্বন্ধে পঞ্চম অধ্যায়ে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে এবং এইরূপ ফাংশনের অন্তরকলন সম্বন্ধীয় যাবতীয় ধর্ম ষষ্ঠ, সপ্তম ও অষ্টম অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলন এবং অন্তরকলন সম্বন্ধীয় প্রয়োজনীয় তত্ত্ব বর্তমান অধ্যায়ে আলোচনার বিষয়বস্তু। তবে পূর্বেই বলা হয়েছে যে আলোচনাকে সহজসাধ্য করতে হলে দুই বা তিন চলবিশিষ্ট ফাংশনের ধারণা নিয়েই অগ্রসর হওয়া ভাল।

9.02 আংশিক অন্তরকলন (Partial differentiation)

একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলন আলোচনার প্রাক্কালে একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলনের ধারণা থেকে আসতে হলে প্রথমে এসে পড়ে আংশিক অন্তর-

কলনের ধারণা। মনে করি $z=f(x, y)$; এখন যদি y কে ধ্রুবক মনে করি তবে $f(x, y)$ ফাংশনটি একটিমাত্র চল x এর ফাংশন, তাহলে এই ফাংশনকে x চলের সাপেক্ষে অন্তরকলন করা যেতে পারে। যেহেতু y কে ধ্রুবক মনে করে অন্তরকলন করা হলো, যেহেতু এই ধরণের অন্তরকলনকে **আংশিক অন্তরকলন** বলা হয়।

প্রতীক চিহ্ন হিসেবে লেখা হয় $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ বা সংক্ষেপে $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, কিন্তু $\dfrac{df}{dx}$ লেখা ত্রুটিপূর্ণ, কারণ $\dfrac{df}{dx}$ লিখলে বুঝায় f ফাংশনটি একমাত্র চল x এর ফাংশন। তাই পাঠকদের আংশিক অন্তরকলনের চিহ্নটি অভ্যাসের ফলে আয়ত্ব করা প্রয়োজন। যেহেতু y কে ধ্রুবক করে রাখা হয়েছে, একচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকলজের সংজ্ঞাকে লেখা যায়

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

অনুরূপভাবে যদি x কে ধ্রুবক মনে করা হয় এবং $f(x, y)$ ফাংশনকে y এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করা হয় তবে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (বা f_x) এবং $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (বা f_y) কে যথাক্রমে x সাপেক্ষ এবং y সাপেক্ষ $f(x,y)$ এর আংশিক বিভেদক সহগ বা আংশিক অন্তরকলজ বলা হয়। (i) এবং (ii) কে এই আংশিক অন্তরকলজ দুইটির সংজ্ঞা হিসেবে নেওয়া হয়।

$u=f(x, y, z)$ এই তিন নিরপেক্ষ চলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত তিনটি আংশিক অন্তরকলজ পাওয়া যেতে পারে :—

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y, z)-f(x, y, z)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k, z)-f(x, y, z)}{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\equiv\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{j\to 0}\frac{f(x, y, z+j)-f(x, y, z)}{j}$$

উদাহরণ 1. যদি $f(x, y) = x^3 + y^2$, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

উত্তর :—

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2)$$

$$= 2x + 0 = 2x, \text{ যেহেতু } y \text{ একটি ধ্রুবক।}$$

(i) সংজ্ঞা অনুসারে অন্যভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + y^2 - (x^2 + y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

পুনরায় $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0 + 2y = 2y$

সংজ্ঞা অনুসারে

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{x^2 + (y+k)^2 - (x^2 + y^2)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{2ky + k^2}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} (2y + k) = 2y$$

উদাহরণ 2. যদি $u = x^2 + y^2 + xy$ হয়, তবে $(1, 2)$ বিন্দুতে $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ এর সংজ্ঞা লেখ এবং দেখাও যে ইহার মান 4.

উত্তর :—

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{(1,2)} \equiv u_x(1, 2) = \lim_{h \to 0} \frac{u(1+h, 2) - u(1, 2)}{h}$$

$$\therefore \quad u_x(1, 2) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2^2 + (1+h)\cdot 2 - (1^2 + 2^2 + 1\cdot 2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} (4+h) = 4$$

উদাহরণ 3. যদি $f(x, y) = x^2y^3 - 2y^2$, তবে $f_y(-2, 1)$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ—

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - 2y^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(2y^2)$$

$$= x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y^3) - 4y, \ [\because\ x \text{ একটি ধ্রুবক }]$$

$$= x^2 3y^2 - 4y$$

$$= 3x^2y^2 - 4y$$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]_{(-2,\, 1)} \equiv f_y(-2, 1) = 3\cdot(-2)^2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = 8.$$

উদাহরণ 4. যদি $f(x, y) = xy\,(x^2 + y^2), \quad (x, y) \neq (0, 0)$
$\qquad = 0, \qquad (x, y) = (0, 0)$

তবে দেখাও যে

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

উত্তর ঃ—এরূপ অঙ্কগুলিতে $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ বা $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ নির্ণয় করে $x = 0$, $y = 0$ প্রতিস্থাপন থেকে প্রকৃত ফল নাও পাওয়া যেতে পারে, সুতরাং সংজ্ঞা থেকে সমাধান করাই বাঞ্ছনীয়।

এখানে $f_x(0, 0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

যখন $(x, y) \neq (0, 0)$ অর্থাৎ একযোগে $x \neq 0$ এবং $y \neq 0$, তখন

$f(x, y)=xy/(x^2+y^2)$; সুতরাং $f(h, 0)=h\,.\,0/(h^2+0^2)=0$; আবার $f(0, 0)=0$.

$$\therefore\quad f_x(0, 0)=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=\lim_{h\to 0} 0=0$$

পুনরায় $f_y(0, 0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0, k)-f(0, 0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{0-0}{k}=\lim\limits_{k\to 0} 0=0$

$$\therefore\quad f_x(0, 0)=f_y(0, 0)=0$$

মন্তব্য :—(0, 0) বিন্দু ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুতে এই ফাংশনের আংশিক অন্তরকলজ নির্ণয় করতে হলে $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ বা $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ নির্ণয় করে x এবং y এর মান বসানো যেতে পারে ; কারণ (0, 0) বিন্দু ব্যতীত অন্য বিন্দুতে $f(x, y)=xy/x^2+y^2)$.

অনুশীলনী :—

1. যদি $u=e^{x/y}$ হয় তবে দেখাও যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{y}e^{x/y}$$

$$\text{এবং } y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y}e^{x/y}.$$

লক্ষ্য কর $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ অর্থাৎ এই আংশিক অন্তরকল সমীকরণের একটি বিশেষ বীজ $e^{x/y}$.

2. যদি $u=\cos\dfrac{x}{y}$, তবে দেখাও যে $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

3. যদি $z=\cos(x+y)$, তবে দেখাও যে $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

4. যদি $z=\cos xy$, তবে দেখাও যে $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

5. যদি $u=f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n$, যেখানে $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$ ফাংশনগুলি x, y, z তিনটি নিরপেক্ষ চলের ফাংশন, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\ldots\frac{\partial f_n}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{\partial f_2}{\partial z}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial z}.$$

6. যদি u এবং v ফাংশন দুইটি x, y নিরপেক্ষ চলের ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial}{\partial x}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}.$$

7. যদি u এবং v ফাংশন দুইটি x, y নিরপেক্ষ চলের ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{u^2}$$

8. যদি u, v এর একটি ফাংশন এবং v, x ও y নিরপেক্ষ চলের ফাংশন হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial}{\partial x}(u)=\frac{dv}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u)=\frac{du}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

বিশেষ উদাহরণঃ যদি $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$ হয় তবে $\frac{\partial x}{\partial r}$ এবং $\frac{\partial r}{\partial x}$ নির্ণয় কর। নিম্নলিখিত সমতার সত্যতা পরীক্ষা কর ঃ—

$$\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=1$$

উত্তর ঃ—যদি r এবং θ-কে নিরপেক্ষ চল মনে করি এবং $x=r\cos\theta$ কে r সাপেক্ষ আংশিক অন্তরকলন করি, তবে পাই

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta;\quad [\,\theta \text{ কে ধ্রুবক মনে করে}\,]$$

$\frac{\partial r}{\partial x}$ চিহ্নটি স্পষ্ট নয়, কারণ চিহ্নটির সাহায্যে বুঝা যায় x নিরপেক্ষ চলসমূহের একটি, কিন্তু অপর চল কি তা স্পষ্ট নয়। অপর চলটি স্পষ্ট না হলে x সাপেক্ষ আংশিক অন্তরকলনের সময় কোন চলকে ধ্রুবক মনে করা হবে ?

এখন $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ থেকে পাই

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}\ ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} = x(x^2 + y^2)^{-1/2}, \ [\ y \text{ কে ধ্রুবক মনে করে }]$$

$$= \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\text{সুতরাং } \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \cos^2\theta \neq 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \neq 1$$

অতএব $\frac{\partial x}{\partial r} \neq 1 \Big/ \frac{\partial r}{\partial x}$; ইহার কারণ $\frac{\partial r}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial x}{\partial r}$ নির্ণয় করার সময় বিভিন্ন চলকে ধ্রুবক মনে করে আংশিক অন্তরকলন করা হচ্ছে।

9.03 আংশিক অন্তরকলনের সহিত ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার সম্পর্ক :

একচলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে আমরা জানি যে, কোন বিন্দুতে অন্তরকলজের অস্তিত্ব ফাংশনের সেই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা নির্দেশ করে। কিন্তু একাধিক চলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে ফাংশনের সব কয়টি আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা নির্দেশ করে না, ইহার কারণ আংশিক অন্তরকলনের সময় এক একবারে একটি চলকে ধ্রুবক মনে করা হয়েছে।

উদাহরণ হিসাবে মনে করি

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

এবং $f(0, 0) = 0$.

$$\text{এখানে } f_x = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$= \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\text{এবং } f_y = \frac{2x(x^2+y^2) - 2y \cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2}, \; x^2+y^2 \neq 0$$

$$= \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \; x^2+y^2 \neq 0$$

পুনরায় যখন $x^2+y^2=0$ অর্থাৎ $x=0$ এবং $y=0$, তখন

$$f_x(0,\ 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\text{এবং } f_y(0,\ 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

অতএব $f(x, y)$ ফাংশনের সকল বিন্দুতে (এমন কি $(0, 0)$ বিন্দুতেও) দুইটি আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে। কিন্তু দেখা যাবে যে $f(x, y)$ এর আংশিক অন্তরকলজ দুইটির অস্তিত্ব থাকা সত্ত্বেও $f(x, y)$ ফাংশনটি X-Y সমতলের সকল বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়। প্রকৃতপক্ষে $f(x, y)$ ফাংশনটি $(0, 0)$ বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন। কারণ আমরা দেখি

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{2m}{1+m^2}.$$

সুতরাং দ্বিসীমাটি m এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন অর্থাৎ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ এই দ্বিসীমার অস্তিত্ব নাই। অতএব $f(x, y)$ ফাংশনটি $(0, 0)$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়, যদিও $f(x, y)$ ফাংশনটি $(0, 0)$ বিন্দুতে সংজ্ঞিত।

উপরোক্ত উদাহরণ থেকে সহজেই প্রতীয়মান হয় যে ফাংশনের আংশিক অন্তর-কলজগুলির অস্তিত্বের সহিত আরও কিছু সর্তের প্রয়োজন যার দ্বারা ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার নির্দেশ পাওয়া যেতে পারে। এই আলোচনার জন্য নিম্নলিখিত উপপাদ্যের অবতারণা করা হলো :

উপপাদ্য 1. যদি একটি ফাংশন $f(x, y)$, X-Y সমতলের একটি অঞ্চল R-এ সংজ্ঞিত হয় এবং ঐ অঞ্চলে f_x ও f_y এর অস্তিত্ব থাকে এবং f_x ও f_y ঐ অঞ্চলে সপ্রান্ত হয়, তবে $f(x, y)$ ফাংশনটি R অঞ্চলে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ :—

মনে কর R অঞ্চলে (a, b) এবং $(a+h,\ b+k)$ দুইটি বিন্দু এবং h ও k এমন ছোট ধরা হলো যে ঐ দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণভাবে R অঞ্চলে অবস্থিত থাকে।

এখন

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)$$
$$=[f(a+h, b+k)-f(a, b+k)]+[f(a, b+k)-f(a, b)] \cdots\cdots (i)$$

যেহেতু f_x ও f_y, R অঞ্চলে সপ্রান্ত, সেহেতু f_x ও f_y সান্ত এবং $f(x, y)$ ফাংশনটি যে কোন একটি চল (x, বা y) সাপেক্ষে অবিচ্ছিন্ন। অতএব মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)$$
$$=hf_x(a+\theta h, b+k)+kf_y(a, b+\theta' k) \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

যেখানে $0<\theta<1$ এবং $0<\theta'<1$.

এখন $|f_x| \leqslant M$ এবং $|f_y| \leqslant M \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$

অতএব (ii) থেকে পাই

$$|f(a+h, b+k)-f(a, b)|$$
$$\leqslant |hf_x(a+\theta h, b+k)| + |kf_y(a, b+\theta' k)|$$
$$\leqslant M(|h|+|k|)$$

যেহেতু h এবং k কে যথেচ্ছ ছোট ধরা যেতে পারে, সেহেতু মনে করতে পারি

$$|h|+|k|<\epsilon/M$$

$$\therefore \quad |f(a+h, b+k)-f(a, b)|<\epsilon,$$

সুতরাং $f(x, y)$ ফাংশনটি R অঞ্চলের যে কোন (a, b) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

9.04 আংশিক ক্রমিক অন্তরকলন।

$f(x, y)$ ফাংশনের আংশিক অন্তরকলজ দুইটি সাধারণভাবে দুই চলবিশিষ্ট ফাংশন ; সুতরাং অন্তরকলজের আবার আংশিক অন্তরকলন করা যেতে পারে। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_y=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_x=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f_{yx}$$ (পরপর আংশিক অন্তরকলনের চলগুলি লক্ষ্য করতে হবে, যেমন $\overleftarrow{f_{yx}}$)

এবং $$\frac{\partial}{\partial x} f_y=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy}$$ (লক্ষ্য কর $\overleftarrow{f_{xy}}$)

এইভাবে আরও উচ্চপর্য্যায়ের আংশিক অন্তরকলন করা যেতে পারে। যেমন

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\equiv f_{xxx}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}\equiv f_{yyy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\equiv f_{xyx}$$

ইত্যাদি।

উদাহরণ 1 যদি $u=\log\sqrt{(x^2+y^2)}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

উত্তর : $u=\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

এখানে $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

উদাহরণ 2 যদি

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)},\ \text{যখন } (x,y)\neq(0,0)$$

এবং $f(0,0)=0$,

দেখাও যে

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0).$$

সমাধান :

এখানে লক্ষ্য করি

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}$$

এবং $$f_{yx}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}$$

সুতরাং $f_x(0, y)$, $f_y(x, 0)$, $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ এইগুলির মান নির্ণয় করতে হবে।

এখন $(x, y) \neq (0, 0)$ হলে আমরা দেখি

$$f_x(x, y) = y\left\{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\}$$

$$f_y(x, y) = x\left\{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\}$$

$\therefore \quad f_x(0, y) = -y, (y \neq 0)$

এবং $f_y(x, 0) = x, \ (x \neq 0).$

পুনরায়

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

এবং $$f_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

সুতরাং আমরা পাই

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

এবং $$f_{yx}(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

$$\therefore \quad f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

উদাহরণ 3 যদি $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, দেখাও যে

(i) $x f_x + y f_y = 2f$

(ii) $x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 2f$

(i) এখানে

$$f_x = 2xy^2(x^2 + y^2)^{-1} + x^2y^2 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{-1}$$

$$= 2xy^4(x^2 + y^2)^{-2}$$

অনুরূপভাবে

$$f_y = 2x^4y(x^2 + y^2)^{-2}$$

$$\therefore \quad xf_x + yf_y = \frac{2x^2y^2(y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 2f \text{ (প্রমাণিত)}$$

(ii) $\because \quad xf_x + yf_y = 2f$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial x}(xf_x + yf_y) = \frac{\partial}{\partial x}(2f)$$

অথবা $xf_{xx} + f_x + yf_{xy} = 2f_x \quad \cdots \quad (1)$

পুনরায় $\dfrac{\partial}{\partial y}(xf_x + yf_y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(2f)$

অথবা $xf_{yx} + f_y + yf_{yy} = 2f_y \quad \cdots \quad (2)$

(1) কে x দ্বারা গুণ করে এবং (2) y দ্বারা গুণ করে পরে দুইটি গুণফলকে যোগ করে (যখন $(x, y) \neq 0$ তখন $f_{xy} = f_{yx}$ লক্ষ্য করে) পাওয়া যায়

$$x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy} = xf_x + yf_y = 2f.$$

উদাহরণ 4 যদি $z = f(x - ct) + g(x + ct)$ হয়, যেখানে f এবং g দুইটি অবাধ (arbitrary) ফাংশন এবং c একটি ধ্রুবক, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

সমাধান ঃ মনে করি $u = x - ct, \; v = x + ct$

এখন $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}[f(u) + g(v)] = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + g'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$= f'(u) + g'(v) \; ; \; \left[f'(u) = \frac{df(u)}{du}, \text{ইত্যাদি} \right]$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} + g''(v)\frac{\partial v}{\partial x} = f''(u) + g''(v)$$

পুনরায় $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}[f(u) + g(v)] = f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} + g'(v)\dfrac{\partial v}{\partial t}$

$$= -cf'(u) + cg'(v)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (-c)^2 f''(u) + (c)^2 g''(v)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

9.05 $f_{xy}(x, y)$ এবং $f_{yx}(x, y)$ এর সমতা সম্পর্কীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 2 (শোয়ার্জের উপপাদ্য) ঃ

যদি f_x, f_y f_{ux} ফাংশনগুলি (x, y) বিন্দুর কোন অঞ্চলে সংজ্ঞিত হয় এবং যদি (x, y) বিন্দুতে f_{yx} অবিচ্ছিন্ন হয় তবে f_{xy} এর অস্তিত্ব থাকবে এবং $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(y, x)$.

প্রমাণঃ মনে করি

$$\phi(x) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

যেখানে x একটি চল, কিন্তু y কে এখানে প্রমাত্রা (parameter) মনে করা হলো।
সুতরাং মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাই

$$\phi(x+h) - \phi(x) = h\phi'(x+\theta h),\ 0 < \theta < 1 \quad \cdots \quad (i)$$

এখন $\phi(x)$ এর সংজ্ঞা থেকে পাই

$$\phi'(x) = f_x(x, y+k) - f_x(x, y) \quad \cdots \quad (ii)$$

এখন (ii) থেকে পাই

$$h \cdot \phi'(x+\theta h) = h\{f_x(x+\theta h, y+k) - f_x(x+\theta h, y)\}$$

এখন উপপাদ্যের প্রকল্প অনুযায়ী f_{xy} এর অস্তিত্ব আছে, সুতরাং পুনরায় মধ্যমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখি

$$h\phi'(x+\theta h) = hkf_{yx}\ (x+\theta h, y+\theta' k),\ 0 < \theta' < 1 \quad (iii)$$

অতএব (i) এবং (iii) থেকে পাই

$$\phi(x+h) - \phi(x) = hk\, f_{yx}(x+\theta h, y+\theta' k) \quad \cdots \quad (iv)$$

$$\therefore \lim_{k\to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{k} = h \lim_{k\to 0} f_{yx}(x+\theta h, y+\theta' k) \quad \cdots \quad (v)$$

এখন $\phi(x)$ এর সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়

$$\lim_{k\to 0} \frac{\phi(x+h)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y)}{k}$$

$$= f_y(x+h, y)$$

এখন $$\lim_{k\to 0} \frac{\phi(x)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

$$= f_y(x, y)$$

অতএব (v) থেকে পাওয়া যায়

$$f_y(x+h, y) - f_y(x, y) = h \lim_{k\to 0} f_{yx}(x+\theta h, y+\theta' k)$$

অর্থাৎ

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h, y) - f_y(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \lim_{k\to 0} f_{yx}(x+\theta h, y+\theta' k) \cdots (vi)$$

যেহেতু $f_{yx}(x, y)$ ফাংশনটি (x, y) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, সেহেতু ডানদিকের পুনরাবৃত্ত

সীমার অস্তিত্ব থাকবে এবং এই পুনরাবৃত্ত সীমা হবে $f_{yx}(x, y)$, তাহলে (vi) এর বামদিকের সীমার অস্তিত্ব থাকবে এবং

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h, y)-f_y(x, y)}{h}=f_{xy}(x, y)$$

$$\therefore \quad f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y).$$

9.06 সাধারণ দিক-নির্দেশক অন্তরকলজ

পূর্বেই আলোচনা করা হয়েছে $f(x, y)$ ফাংশনের দুইটি আংশিক অন্তরকলজ f_x এবং f_y যথাক্রমে X- ও Y-অক্ষরেখার দিকে ফাংশনের পরিবর্তনের হার নির্ধারণ করে। সুতরাং এই দুই বিশেষ দিক-নির্দেশক অন্তরকলজ চিন্তা না করে সাধারণভাবে যে কোন দিক-নির্দেশক অন্তরকলজের ধারণা করা যেতে পারে।

মনে করি $f(x, y)$ ফাংশন (a, b) বিন্দুর কোন অঞ্চলে সংজ্ঞিত। এখন মনে করি $(a+h, b+k)$ বিন্দুটি যখন (a, b) বিন্দুর অভিমুখী তখন $(a+h, b+k)$ বিন্দুগুলি $y-b=\tan \alpha\ (x-a)$ সরলরেখার উপর অবস্থিত।

$$\therefore \quad (b+k)-b=\tan \alpha\ (a+h-a)$$

অথবা $k=h \tan \alpha$

সুতরাং লেখা যায়

$$h=\rho \cos \alpha, \quad k=\rho \sin \alpha$$

$$\therefore \quad \rho=\sqrt{(h^2+k^2)}$$

এখন লক্ষ্য করি যখন $(a+h, b+k)$ বিন্দুটি $y-b=\tan \alpha\ (x-\alpha)$ সরলরেখা-পথে (a, b) বিন্দুর অভিমুখী তখন $\rho\to 0$, যেখানে (a, b) থেকে $(a+h, b+k)$ বিন্দুর দূরত্ব ρ (মনে রাখা উচিত যে h এবং k নিরপেক্ষভাবে শূন্যের অভিমুখী নয়)।

এখন $\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\cos\alpha,\ b+\rho\sin\alpha)-f(a, b)}{\rho}$ এর যদি অস্তিত্ব থাকে, তবে এই সীমাকে $f(x, y)$ ফাংশনের α দিকের অন্তরকলজ বলা হয়। প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$D_\alpha f(a, b)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(a+\rho\cos\alpha,\ b+\rho\sin\alpha)-f(a, b)}{\rho}$$

সুতরাং $f(x, y)$ ফাংশনের (x, y) বিন্দুতে α দিকের অন্তরকলজ বলতে বুঝায়

$$D_\alpha f(x, y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\sin\alpha)-f(x, y)}{\rho}$$

যেখানে $\rho=\sqrt{(x^2+y^2)}$.

ভেক্টর (vector) চিত্রের সাহায্যে লেখা যায়

$$D_\alpha f(x, y) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(X+\rho U) - f(X)}{\rho},$$

যেখানে $X = (x, y)$ এবং $U = (\cos \alpha, \sin \alpha)$;
অর্থাৎ যদি η একটি এমন দিক হয় যার দিক-কোসাইনসমূহ (direction-cosines) (l, m) যেখানে $l = \cos \alpha$ এবং $m = \cos (\pi/2 - \alpha)$, তবে এরূপ দিকের (x, y) বিন্দুতে $f(x, y)$ ফাংশনের অন্তরকলজকে $D_\eta f(x, y)$ বা $\frac{\partial f(x, y)}{\partial \eta}$ এর দ্বারা সূচিত করা হয়।

উপরোক্ত ধারণাটি তিন নিরপেক্ষ চলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে সহজেই প্রযোজ্য। যথা—যদি η একটি এমন দিক হয় যার দিক-কোসাইনসমূহ (l, m, n), যেখানে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, তবে এরূপ দিকের (x, y) বিন্দুতে (x, y, z) ফাংশনের অন্তরকলজকে $D_\eta f(x, y, z)$ বা $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial \eta}$ এর দ্বারা সূচিত করা হয় এবং

$$D_\eta f(x, y, z) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(X+\rho U) - f(x)}{\rho},$$

যেখানে $X = (x, y, z)$, $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$
এবং $U = (l, m, n)$, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

উদাহরণ ঃ যদি $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, যদি $x \neq 0$

$= 0$, যদি $x = 0$

তবে দেখাও যে $f(x, y)$ ফাংশনের যে কোন দিকের অন্তরকলজ $(0, 0)$ বিন্দুতে বর্তমান, কিন্তু $f(x, y)$ ফাংশনটি $(0, 0)$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়।

সমাধান ঃ মনে করি η একটি যে কোন দিক যার দিক-কোসাইনসমূহ (l, m)।

এখন $$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \eta} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(\rho l, \rho m) - f(0, 0)}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{lm^2}{l^2 + \rho^2 m^4}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial \eta} = \frac{m^2}{l}, \text{ যদি } l \neq 0$$

$$= 0, \quad \text{যদি } l = 0$$

সুতরাং (0, 0) বিন্দুতে $f(x, y)$ ফাংশনের যে কোন দিকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে।

অন্যদিকে লক্ষ্য করা যায়

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ x=my^2}} f(x, y)=\frac{m}{m^2+1},$$

সীমাটি m এর বিভিন্ন মানের জন্য বিভিন্ন বলে দ্বিসীমার অস্তিত্ব নাই এবং $f(x, y)$ ফাংশন (0, 0) বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

মন্তব্য ঃ $f(x, y)$ ফাংশনের সব দিকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকা সত্ত্বেও ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নাও হতে পারে।

9.07 বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকল ঃ

একচলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে লক্ষ্য করা হয়েছে যে ফাংশনের অন্তরকলজের অস্তিত্ব এবং ফাংশনের অন্তরকলের অস্তিত্ব সমতুল্য। অর্থাৎ অন্তরকলজের অস্তিত্বই ফাংশনের অন্তরকলের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় ও পর্য্যাপ্ত সর্ত। কিন্তু ফাংশনের ধারণার যখন প্রসারণ হয় অর্থাৎ যখন বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের ধারণা করা হয় তখন অন্তরকলজের ঐরূপ ধর্ম বজায় থাকে না। বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে সব দিকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব ফাংশনের অন্তরকলের অস্তিত্বের আবশ্যকীয় সর্ত, অথচ সব দিকের অন্তরকলজেয় অস্তিত্ব ফাংশনের অন্তরকলের অস্তিত্ব নির্দেশ করে না। এই অনুচ্ছেদে বহুচলবিশিষ্ট ফাংশনের অন্তরকল সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

মনে করি $f(x, y)$ ফাংশনটি এমন যে (x, y) বিন্দুতে f_x এবং f_y এর অস্তিত্ব আছে; মনে করি (x, y) বিন্দুর কোন এক অঞ্চলে অন্তত যে কোন একটি আংশিক অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে এবং ঐ আংশিক অন্তরকলজ ঐ অঞ্চলে অবিচ্ছিন্ন। তাহলে ধরা যেতে পারে f_x, (x, y) এর কোন অঞ্চলে বর্তমান এবং অবিচ্ছিন্ন। এখন মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে পাওয়া যায়

$$1)\quad f(x+h, y+k)-f(x, y+k)=h\frac{\partial f(x+\theta h, y+k)}{\partial x}, 0<\theta<1$$

আমরা জানি

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}=f_y$$

অতএব

2) $f(x, y+k)-f(x, y)=kf_y+k\sigma,$

যেখানে $\sigma \to 0$, যখন $k \to 0$.

1) এবং 2) থেকে পাওয়া যায়

3) $$f(x+h,\ y+k)-f(x, y)=h\,\frac{\partial f(x+\theta h,\ y+k)}{\partial x}+kf_y+k\sigma$$

যেহেতু f_x ফাংশন (x, y) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন, সেহেতু আমরা পাই

4) $$\frac{\partial f(x+\theta h,\ y+k)}{\partial x}=f_x+\rho,$$

যেখানে ρ, h এবং k এর একটি ফাংশন এবং h ও k এর সাথে ρ শূন্যের অভিমুখী।

অতএব 3) এবং 4) থেকে দেখি

$$\triangle f \equiv f(x+h, y+k)-f(x, y)$$

5) $$=hf_x+kf_y+h\rho+k\sigma,$$

যেখানে h ও k এর সাথে ρ ও σ শূন্যের অভিমুখী। তাহলে আমরা উপরোক্ত আলোচনার ফলকে নিম্নলিখিত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি :

উপপাদ্য 3. যদি $f(x, y)$ ফাংশনটি এমন হয় যে (x, y) বিন্দুতে f_x ও f_y এর অস্তিত্ব আছে এবং (x, y) বিন্দুর কোন এক অঞ্চলে অন্তত একটি আংশিক অন্তরকলজ বর্তমান এবং অবিচ্ছিন্ন, তবে

$$\triangle f \equiv f(x+h, y+k)-f(x, y)=hf_x+kf_y+h\rho+k\sigma,$$

যেখানে ρ এবং σ উভয়েই শূন্যের অভিমুখী যখন h ও k নিরপেক্ষভাবে শূন্যের অভিমুখী।

অন্তরকলের সংজ্ঞা : একটি ফাংশন $f(x, y)$ কোন অঞ্চল R এর সকল বিন্দুতে সংজ্ঞিত হলে ঐ অঞ্চলের (x, y) বিন্দুতে অন্তরকলনীয় হবে যদি (x, y) এর এমন একটি অঞ্চল থাকে যেখানে $(x+h, y+k)$ যে কোন বিন্দুতে $f(x+h, y+k)$ কে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+Ah+Bk+\rho h+\sigma k \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

যেখানে A এবং B, h ও k এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং ρ ও σ, h ও k এর সাথে শূন্যের অভিমুখী।

অন্তরকলনীয়তার সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে যদি $k=0$ হয়, তবে

$$\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}=A+\rho \quad (h\neq 0)$$

যেখানে h এর উপর A নির্ভরশীল নয় এবং $\rho\to 0$ যখন $h\to 0$.

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}=A$$

অর্থাৎ $A=f_x$

অনুরূপভাবে যদি $h=0$ হয়, তাহলে দেখানো যেতে পারে $B=f_y$.

সুতরাং (1)কে লেখা যেতে পারে

$$f(x+h, y+k)=f(x, y)+hf_x+kf_y+h\rho+k\sigma \quad \cdots \quad (2)$$

যখন (1) অথবা (2) সিদ্ধ হয়, তখন বলা হয় $f(x, y)$ ফাংশনটি সম্পূর্ণভাবে অন্তরকলন যোগ্য (totally differentiable)। hf_x+kf_y কে বলা হয় **সম্পূর্ণ অন্তরকল** বা **অন্তরকল** (total differential বা differential) এবং প্রতীক চিহ্ন হিসাবে লেখা হয়

$$df=hf_x+kf_y \quad \cdots \quad (3)$$

মন্তব্য : (i) উপপাদ্য 3 এর প্রকল্প অনুযায়ী স্পষ্টত প্রতীয়মান হয় যে, কোন ফাংশন $f(x, y)$ উপপাদ্য 3 এর সর্তগুলি সিদ্ধ করলে $f(x, y)$ ফাংশনটি (x, y) বিন্দুতে অন্তরকলনীয় হবে।

(ii) তিনচলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে (3) এর প্রকাশ নিম্নরূপ :

$$df=hf_x+kf_y+mf_z.$$

(iii) h কে $\triangle x$ এবং k কে $\triangle y$ লিখলে (3) থেকে পাওয়া যায়

$$df=f_x\cdot\triangle x+f_y\cdot\triangle y$$

এখন মনে করি $f(x, y)=x$; তাহলে $f_x=1,\ f_y=0$

$$\therefore\ df=d_x=1\cdot\triangle x+0\cdot\triangle y$$

অনুরূপভাবে যদি $f(x, y)=y$ মনে করি, তবে $df=dy=\triangle y$

সুতরাং $\mathbf{df=f_x dx+f_y dy} \quad \cdots \quad (4)$

(iv) তিনচলবিশিষ্ট ফাংশনের ক্ষেত্রে (4) এর প্রকাশ নিম্নরূপ

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz \quad \cdots \quad (5)$$

উদাহরণ 1 যদি $f=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ হয় তবে df নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ

এখানে $$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^2+y^2}\cdot 2x\sin^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^2+y^2}\cdot 2y\sin^2 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=e^{x^2+y^2}\cdot 2\sin z\cos z=e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

$$\therefore\ df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$$=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z\,dx+2y\sin^2 z\,dy+\sin^2 z\,dz)$$

উদাহরণ 2 যদি $f(x,y)=e^{x^2y}$ হয়, তবে $f(1\cdot05,\ 0\cdot97)$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ

মনে কর $x=x_0+\triangle x,\ y=y_0+\triangle y$; এখন $\triangle x$ এবং $\triangle y$ যদি যথেচ্ছ-ভাবে ছোট হয় তবে আসন্ন মান হিসাবে পাওয়া যায়

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\triangle x+f_y(x_0,y_0)\triangle y.$$

মনে কর $x_0=1,\ y_0=1,\ \triangle x=0\cdot05,\ \triangle y=-0\cdot03$; তাহলে

$$f(x_0,y_0)=e,$$

$$f_x(x_0,y_0)=2e$$

$$f_y(x_0,y_0)=e.$$

$$\therefore\quad f(1\cdot05,0\cdot97)=e+2e(0\cdot05)+e(-0\cdot03)$$

$$=1\cdot07e=2\cdot91$$ (আসন্ন মান)

উপপাদ্য 4 যদি $f(x,y)$ ফাংশনটি (x,y) বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে $f(x,y)$ ফাংশন (x,y) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণ ঃ

যেহেতু $f(x,y)$ ফাংশনটি (x,y) বিন্দুতে অন্তরকলনীয়, সেহেতু আমরা জানি

$$\triangle f\equiv f(x+h,y+k)-f(x,y)$$

$$=hf_x+kf_y+h\rho+k\sigma,$$

যেখানে $\rho, \sigma \to 0$ যখন $h, k \to 0$.

এখন $\lim_{h\to 0} hf_x = 0$, $\lim_{k\to 0} kf_y = 0$

উপরন্তু $\lim_{h\to 0} h\rho = 0$, $\lim_{k\to 0} k\sigma = 0$

$\therefore \lim_{h, k\to 0} \triangle f = 0$

অর্থাৎ $\lim_{h, k\to 0} \{f(x+h, y+k) - f(x, y)\} = 0$

অর্থাৎ $\lim_{h, k\to 0} f(x+h, y+k) = f(x, y)$

অতএব $f(x, y)$ ফাংশন (x, y) বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উপপাদ্য 5 যদি $f(x, y)$ ফাংশনটি (x, y) বিন্দুতে অন্তরকলনীয় হয়, তবে (x, y) বিন্দুতে $f(x, y)$ ফাংশনের যে কোন দিকের অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকবে।

প্রমাণ :

যেহেতু $f(x, y)$ ফাংশন (x, y) বিন্দুতে অন্তরকলনীয়, আমরা জানি

$$\triangle f \equiv f(x+h, y+k) - f(x, y)$$
$$= hf_x + kf_y + h\epsilon_1 + k\epsilon_2 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

যেখানে $\epsilon_1, \epsilon_3 \to 0$ যখন $h, k \to 0$

এখন (i) থেকে দেখা যায়

(ii) $f(x+h, y+k) - f(x, y) = hf_x + kf_y + \epsilon\rho$, $\rho = \sqrt{(h^2+k^2)}$,

যেখানে $\epsilon \to 0$ যখন $\rho \to 0$

কারণ

$$|f(x+h, y+k) - f(x, y) + hf_x + kf_y| = |h\epsilon_1 + k\epsilon_2|$$
$$\leqslant |\epsilon| \sqrt{(h^2+k^2)},$$

যেখানে $\epsilon = |\epsilon_1| + |\epsilon_2|$

মনে করা যাক $(x+h, y+k)$ বিন্দুটি $Y - y = \tan \measuredangle (X - x)$ সরলরেখার উপর দিয়ে (x, y) এর অভিমুখী। তাহলে

$$h = \rho \cos \measuredangle, \quad k = \rho \sin \measuredangle$$

এবং $\rho \to 0$ যখন $h, k \to 0$.

$\therefore$ (ii) থেকে পাওয়া যায়

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=\rho(f_x \cos \alpha+f_y \sin \alpha+\epsilon)$$

অথবা $$\frac{f(x+h, y+k)-f(x, y)}{\rho}=f_x \cos \alpha+f_y \sin \alpha+\epsilon$$

$$\therefore \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+h, y+k)-f(x, y)}{\rho}=f_x \cos \alpha+f_y \sin \alpha$$

অথবা $$D_\alpha f(x, y)=f_x \cos \alpha+f_y \sin \alpha \qquad \cdots \text{(iii)}$$

যেহেতু $f(x, y)$ ফাংশনটি অন্তরকলনীয়, f_x ও f_y এর অস্তিত্ব আছে। সুতরাং যখনই $f(x, y)$ ফাংশনটি অন্তরকলনীয় তখনই (iii) থেকে স্পষ্টতই দেখা যায় যে $D_\alpha f(x, y)$ এর অস্তিত্ব থাকবে।

মন্তব্য : অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে যে যদি $f(x, y, z)$ ফাংশনটি (x, y, z) বিন্দুতে অন্তরকলনীয় হয় তবে ঐ বিন্দুতে $f(x, y, z)$ ফাংশনের যে কোন দিকে (যথা η দিকে যার দিক-কোসাইনসমূহ (l, m, n)) অন্তরকলজ বর্তমান এবং

$$\mathbf{D_\alpha f(x, y, z)=lf_x+mf_y+nf_z}.$$

উদাহরণ : যদি $f=x^2+y^2+z^2$ হয়, তবে $(1, 1, 1)$ বিন্দুতে $f(x, y, z)$ এর $2i+j+3k$ ভেক্টরের দিকে অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে

$$l=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$m=\frac{1}{\sqrt{14}}, n=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

এখন $$D_\alpha f(x, y, z)=\frac{2}{\sqrt{14}}f_x+\frac{1}{\sqrt{14}}f_y+\frac{3}{\sqrt{14}}f_z$$

$$\therefore D_\alpha f(1,1,1)=\frac{2}{\sqrt{14}}2+\frac{1}{\sqrt{14}}2+\frac{3}{\sqrt{14}}2$$

$$=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

9.08 $f(x, y)=0$ সমীকরণ থেকে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় :

উপপাদ্য 6 মনে করি y, x এর একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন যেখানে ফাংশন-সম্পর্ক নিম্নলিখিত সমীকরণ সাহায্যে প্রকাশিত

$$f(x, y)=0.$$

(x, y) বিন্দুর কোন অঞ্চলে $f(x, y)$, $f_x(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$ অবিচ্ছিন্ন এবং $f_y(x, y) \neq 0$; তাহলে $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$.

প্রমাণ : মনে করি x চল পরিবর্তিত হয়ে $x+\triangle x$ হল, $x+\triangle x$ এর সঙ্গত y এর মান $y+\triangle y$ যেহেতু প্রত্যেক x এর সঙ্গত মান y ; এখন ফাংশন-সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y)=0$$

$$\therefore \quad f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y)=0$$

এখন $f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y)$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\triangle x+\frac{\partial f}{\partial y}\triangle y+\epsilon_1\triangle x+\epsilon_2\triangle y,$$

যেখানে $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ যখন $\triangle x, \triangle y \to 0$.

যেহেতু $f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y)=0$, সেহেতু পাওয়া যায়

$$f_x\triangle x+f_y\triangle y+\epsilon_1\triangle x+\epsilon_2\triangle y=0$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x}=-\frac{f_x+\epsilon_1}{f_y+\epsilon_2}$$

অতএব $\frac{dy}{dx}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=-\frac{f_x}{f_y}$

উদাহরণ : মনে কর $e^y-e^x+xy=0$.

তাহলে $f(x, y)=e^y-e^x+xy$

$$\therefore \quad f_x=-e^x+y, \quad f_y=e^y+x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

মন্তব্য : উপ পাদ্য 6 এর নিয়মে অস্পষ্ট ফাংশন (implicit function) এর অন্তরকলজ নির্ণয় করা সহজসাধ্য হয়। উপপাদ্য 6 থেকে দেখা যায়

$f_x dx + f_y dy = 0$; এই নিয়মের সামান্যীকরণ করলে পাওয়া যায় যদি $f(x_1, x_2, \cdots x_n, y) = 0$ সমীকরণে y কে $x_1, x_2, \cdots x_n$ এর একটি ফাংশন-রূপে সংজ্ঞা দেয় তবে

$$f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \cdots\cdots + f_{x_n} dx_n + f_y dy = 0 \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

এখন $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \cdots\cdots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad \cdots \quad \cdots (2)$

(2) থেকে dy এর মান (1) তে বসালে এবং $dx_1, dx_2, \cdots\cdots dx_n$ এর প্রত্যেকের সহগ শূন্যের সঙ্গে সমান করে লিখলে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_r} = 0 \; ; \; r = 1 \; ; \; 2, \cdots n \quad \cdots \quad \cdots (3)$$

(3) থেকে y এর আংশিক অন্তরকলজ পাওয়া সম্ভব হয়, যদিও y কে $x_1, x_2, \cdots x_n$ এর স্পষ্ট বা সরাসরি ফাংশন (explicit function) হিসাবে দেখা যাচ্ছে না।

9.09 ফাংশনের ফাংশন-এর আংশিক অন্তরকলজ :

মনে করি $f(u, v)$ একটি ফাংশন যেখানে $u = \phi(x, y)$ এবং $v = \psi(x, y)$; স্পষ্টতই $f \equiv f(\phi(x, y), \psi(x, y))$ ফাংশনটি x, y এর একটি ফাংশন।

মনে করি $f(u, v)$ কোন অঞ্চল R এ সংজ্ঞিত এবং $u \equiv \phi(x, y)$ ও $v = \psi(x, y)$ কোন অঞ্চল R' এ সংজ্ঞিত। মনে করি $f(u, v)$ এর আংশিক অন্তরকলজ দুইটি R অঞ্চলে বর্তমান এবং অবিচ্ছিন্ন ; u ও v এর আংশিক অন্তর-কলজসমূহ R' অঞ্চলে বর্তমান এবং সপ্রান্ত। সুতরাং f, u, v তাদের অঞ্চলে অবিচ্ছিন্ন।

মনে করি $\quad \Delta f = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v), \quad \cdots \quad \cdots (1)$

$$\Delta u = \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y), \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

এবং $\quad \Delta v = \psi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \psi(x, y). \quad \cdots \quad \cdots (3)$

এখন $\quad \Delta f = [f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)] + [f(u, v + \Delta v) - f(u, v)]$

মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে

$$\Delta f = \Delta u \cdot \frac{\partial}{\partial u}(u + \theta_1 \Delta u, \; v + \Delta v) + \Delta v \cdot \frac{\partial}{\partial v} f(u, v + \theta_2 \Delta v).$$

উভয় পক্ষকে $\Delta x \; (\neq 0)$ দ্বারা ভাগ করিয়া মনে করি $\Delta x \to 0$; যেহেতু

$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\Delta v}{\Delta x} \to \frac{\partial v}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial u}$ ও $\frac{\partial f}{\partial v}$ অবিচ্ছিন্ন এবং $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$, আমরা পাই

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots \cdots \cdots (4) \\ \text{অনুরূপভাবে} \quad \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \cdots \cdots \cdots (5) \end{aligned}\right\}$$

পুনরায় আমরা জানি

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_v \Delta v + \epsilon_1 \Delta u + \epsilon_2 \Delta v \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \epsilon_3 \Delta x + \epsilon_4 \Delta y \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \epsilon_5 \Delta x + \epsilon_6 \Delta y \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

যেখানে Δx এবং Δy এর সাথে ϵ_i গুলি শূন্যের অভিমুখী।

(7) এবং (8) থেকে Δu এবং Δv এর মান (6) তে বসিয়ে (4) এবং (5) এর সাহায্যে পাই

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta_y + \epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

এখন Δx, Δy এর সাথে ϵ এবং ϵ' শূন্যের অভিমুখী। অতএব (9) থেকে প্রতীয়মান হয় যে f ফাংশনটি x ও y এর একটি অন্তরকলনীয় ফাংশন। অন্তরকলের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় 9 এর রূপায়ণ নিম্নরূপ ঃ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

উপরন্তু (6) থেকে পাওয়া যায়

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{dv} dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}\right\} \quad \cdots \cdots (12)$$

মন্তব্য ঃ (i) (4)-(5) এবং (12) নিয়মগুলি মনে রাখা কর্তব্য।

(ii) যদি $u = \phi(t)$ এবং $v = \psi(t)$ হয়, তবে (4)-(5) এর পরিবর্তে পাওয়া যাবে

$$\partial f / \partial t = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

(iii) যদি $f(u, v, w)$ একটি ফাংশন এমন হয় যে $u=\theta(x, y, z)$, $v=\phi(x, y, z)$ এবং $w=\psi(x, y, z)$ এবং ফাংশনগুলি অন্তরকলনযোগ্য হয় তবে

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \cdots \cdots (14)$$

এবং $df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz. \quad \cdots \cdots (15)$$

উদাহরণ : যদি $f=\log(u^2+v)$, $u=e^{x+y^2}$ এবং $v=x^2+y$ হয় তবে $\frac{\partial f}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial f}{\partial y}$ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

এখানে $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u}{u^2+v}$, $\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{1}{u^2+v}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x+y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2x$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2}+\frac{1}{u^2+v}\cdot 2x=\frac{2}{u^2+v}(ue^{x+y^2}+x)$$

অনুরূপভাবে $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v}(2uye^{x+y^2}+1)$

9.10 সমমাত্রিক ফাংশন (Homogeneous function)

সংজ্ঞা : যদি $f(x, y)$ কে $x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ অথবা $y^n\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ আকারে প্রকাশ করা যায় অথবা যদি $f(tx, ty)=t^n f(x, y)$ হয়, তাহলে $f(x, y)$ কে n মাত্রার সমমাত্রিক ফাংশন বলা হয়।

মনে কর $f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$

এখানে $f(x, y)=\dfrac{x^3\left(1+\dfrac{y^3}{x^3}\right)}{x\left(1-\dfrac{y}{x}\right)}$

$$=x^2\left[\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3\right\} / \left\{1-\frac{y}{x}\right\}\right]$$

$$\equiv x^2\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

অতএব $f(x, y)$ ফাংশনটি 2 মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

পুনরায় $f(x, y)=\dfrac{y^3\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y\left(\dfrac{x}{y}-1\right)}=y^2\ \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$

আবার $f(tx, ty)=\dfrac{t^3(x^3+y^3)}{t(x-y)}=t^2\cdot\dfrac{x^3+y^3}{x-y}=t^2f(x, y).$

উপরোক্ত সংজ্ঞার সামান্যীকরণ করলে পাওয়া যায়ঃ

যদি $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ একটি p মাত্রার সমমাত্রিক ফাংশন হয় তবে

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)=x_1{}^p\phi_1\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots \frac{x_n}{x_1}\right)$$

$$=x_2{}^p\phi_2\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \dots \frac{x_n}{x_2}\right)$$

$$=\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

অথবা $f(tx_1, tx_2, \cdots tx_n)=t^p f(x_1, x_2, \cdots x_n).$

উদাহরণঃ (i) $ax^2+2hxy+by^2$ ফাংশনটি 2 মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

(ii) $x^4+2xy^3-5y^4$ ফাংশনটি 4 মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

(iii) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ফাংশনটি $\frac{1}{2}$ মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

উপপাদ্য 7 : (সমমাত্রিক ফাংশন সম্বন্ধীয় অয়লারের উপপাদ্য)

যদি $f(x, y)$ ফাংশনটি n মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন হয়, তাহলে

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

প্রমাণ :—

প্রথম পদ্ধতি : যেহেতু $f(x, y)$ ফাংশনটি n মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন, সংজ্ঞা অনুসারে আমরা পাই

$$f(x, y) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right) = x^n \phi(u), \text{ যেখানে } u = \frac{y}{x}$$

এখন $$\frac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1}\phi(u) + x^n \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ যেখানে } \phi'(u) = \frac{d\phi(u)}{du}$$

$$= nx^{n-1}\phi(u) + x^n \phi'(u) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\therefore \quad x \frac{\partial f}{\partial x} = nx^n \phi(u) - x^{n-1} y \phi'(u)$$

পুনরায় $$\frac{\partial f}{\partial y} = x^n \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} = x^n \phi'(u) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad y \frac{\partial f}{\partial y} = x^{n-1} y \phi'(u)$$

সুতরাং $$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nx^n \phi(u)$$

$$= nx^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= nf(x, y). \quad \text{(প্রমাণিত)}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : যেহেতু $f(x, y)$ ফাংশনটি n মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন, সংজ্ঞা অনুসারে আমরা পাই

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

মনে করি $X = tx$, $Y = ty$; তাহলে

$$f(X, Y) = t^n f(x, y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\{f(X, Y)\} = \frac{\partial}{\partial t}\{t^n f(x, y)\}$$

অর্থাৎ $$\frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = nt^{n-1} f(x, y)$$

অর্থাৎ $x\dfrac{\partial f}{\partial X}+y\dfrac{\partial f}{\partial Y}=nt^{n-1}f(x,y)$

এখন $t=1$ বসিয়ে দেখা যায় $X=x,\ Y=y,\ \dfrac{\partial f}{\partial X}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial Y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

সুতরাং আমরা পাই

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$$

মন্তব্য : (i) যদি $f(x, y, z)$ ফাংশনটি n মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন হয়, তবে অয়লারের উপপাদ্যটি দাঁড়ায়

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z).$$

প্রমাণ করতে হলে দ্বিতীয় পদ্ধতিটি সুবিধাজনক। যথা :—

$$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$$

মনে করি $X=tx,\ Y=ty,\ Z=tz$; তাহলে পাই

$$f(X,Y,Z)=t^nf(x,y,z)$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial t}f(X,Y,Z)=\frac{\partial}{\partial t}\{t^nf(x,y,z)\}$$

অথবা $\dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial Z}\dfrac{\partial Z}{\partial t}=nt^{n-1}f(x,y,z)$

অথবা $x\dfrac{\partial f}{\partial X}+y\dfrac{\partial f}{\partial Y}+z\dfrac{\partial f}{\partial Z}=nt^{n-1}f(x,y,z)$

এখন $t=1$ বসিয়ে পাই

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$$

(ii) অয়লারের উপপাদ্যের সামান্যীকরণে পাওয়া যায়

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+x_m\frac{\partial f}{\partial x_m}=nf(x_1,x_2,\cdots x_m)$$

উদাহরণ 1. যদি $u=\cos^{-1}\{(x+y)/(\sqrt{x}+\sqrt{y})\}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\tfrac{1}{2}\cot u=0$$

সমাধান :

মনে করি $f(x, y) = \cos u = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; তাহলে

$$f(tx, ty) = \frac{t(x+y)}{t^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = t^{\frac{1}{2}} f(x, y)$$

অতএব $f(x, y)$ ফাংশনটি $\frac{1}{2}$ মাত্রার একটি সমমাত্রিক ফাংশন।

সুতরাং অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে পাই

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \tfrac{1}{2} f$$

এখন $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\cos u) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial u}(\cos u)$

$$= \sin u \frac{\partial u}{\partial x}$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\sin u \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\therefore \quad x\left(-\sin u \frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(-\sin u \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \tfrac{1}{2}\cos u$$

অথবা $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\tfrac{1}{2}\cot u$

$$\therefore \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\cot u = 0$$

উদাহরণ 2. যদি $u(x, y)$ একটি n মাত্রার সমমাত্রিক ফাংশন হয়, তবে প্রমাণ কর

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u.$$

সমাধান : অয়লারের উপপাদ্য অনুসারে আমরা জানি

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন (1) এর উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = n\frac{\partial u}{\partial x}$$

অথবা $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (n-1)\dfrac{\partial u}{\partial x} \qquad \cdots \quad (2)$

অনুরূপভাবে (1) এর উভয়পক্ষকে y এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরকলন করে $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ধরলে পাওয়া যায়

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (n-1)\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \cdots \quad (3)$$

(2) কে x এবং (3) কে y দ্বারা গুণ করে দুইটি সমীকরণ যোগ করলে পাওয়া যায়

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (n-1)\left\{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$
$$= (n-1)nu.$$

বিবিধ অনুশীলনী 9

1. দুই নিরপেক্ষ চলবিশিষ্ট ফাংশনের আংশিক অন্তরকলজ দুইটির সংজ্ঞা লেখ।

যদি $u = \cos^{-1}\frac{x}{y} + \cot^{-1}\frac{y}{x}$ হয়, তবে নিম্নলিখিত অভেদ প্রতিপাদন কর :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

যদি $u = \sin^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x}$, তবে $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ এর মান নির্ণয় কর।

[নির্ণেয় মান $= 0$]

2. যদি $u = x^2y + y^2z + z^2x$, দেখাও যে

$u_x + u_y + u_z = (x+y+z)^2$

3. প্রমাণ কর

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+wy+w^2z)(x+w^2y+wz)$,

যেখানে $1 + w + w^2 = 0$.

এখন দেখাও যে $u_x + u_y + u_z = 3/(x+y+z)$, যখন

$u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

4. যদি $u = \tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$ হয়, প্রমাণ কর যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

5. যদি $u = x \sin y + y \sin x$, প্রমাণ কর যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

6. যদি $u=\log\ \tan\frac{y}{x}$ হয়, দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

7. যদি $u=e^{my}\cos mx$ হয়, দেখাও যে $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

8. যদি $u=x^y$ হয়, তবে $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ এবং $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ এর সমতা পরীক্ষা কর।

9. চার নিরপেক্ষ চলবিশিষ্ট সমমাত্রিক ফাংশনের সংজ্ঞা লেখ (মনে কর মাত্রা $=10$)।

দুই চলবিশিষ্ট সমমাত্রিক ফাংশনের ক্ষেত্রে অয়লারের উপপাদ্য বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

যদি $u=\sin^{-1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ হয়, দেখাও যে

$$2(xu_x+yu_y)=\tan u.$$

যদি $V=\sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ হয়, দেখাও যে

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}=\tan V.$$

10. যদি $u=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}$ হয়, প্রমাণ কর

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2u.$$

11. যদি $u=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ হয়, দেখাও যে

(i) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}+u=0$

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

12. যদি $u=f(x-y,\ y-z,\ z-x)$ হয়, প্রমাণ কর

$u_x+u_y+u_z=0.$

13. যদি $u=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$ হয়, দেখাও যে

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

14. যদি $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে

(i) $\dfrac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

(ii) $\dfrac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

(iii) $r\dfrac{\partial}{\partial r}=x\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$

(iv) $\dfrac{\partial}{\partial\theta}=x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}.$

15. যদি $V=z\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, তবে দেখাও যে

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

16. যদি $x=r\cos\theta$ এবং $y=r\sin\theta$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

17. যদি $u=e^{xyz}$ হয়, প্রমাণ কর

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=(1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}.$$

18. যদি $x^2+y^2\tan x+e^y=0$, তবে দেখাও যে

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y^2\sec^2 x}{2y\tan x+e^y}.$$

19. যদি $f(x,y)=x+y$, যখন $x=0$ অথবা $y=0$

$=1$, অন্যত্র

তাহলে দেখাও যে $f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$; কিন্তু $f(x,y)$ ফাংশন $(0,0)$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন নয়।

20. যদি $f(x,y)=x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y}$, যখন $(x,y)\neq(0,0)$

$=0$, যখন $x=y=0$

তাহলে দেখাও যে

$$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0).$$

21. যদি $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, দেখাও যে $(0,0)$ বিন্দুতে $f(x,y)$ ফাংশন অন্তরকলনযোগ্য নয়।

22. যদি $z=f(x, y)$ হয়, তবে $\frac{\partial z}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial z}{\partial y}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

$f(x, y)$ ফাংশনের নতির (gradient) সহিত আংশিক অন্তরফলজ দুইটির কি সম্পর্ক ? [সংকেত : grad $z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$]

$f(x, y)$ ফাংশনের অনুভূমিক রেখাগুলি (level lines) কিভাবে নির্ণয় করবে ? [সংকেত : $f(x, y)=c$]

$f(x, y)$ যদি একটি শূন্য মাত্রার সমমাত্রিক ফাংশন হয়, তবে দেখাও $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে :

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1, u),$$

যেখানে $u=y/x$.

23. যদি $w=e^{x(x-y)}$, যেখানে $x=2t \cos t$ এবং $y=2t \sin t$, দেখাও যে

$$\left[\frac{dw}{dt}\right]_{t=\pi}=4\pi(2-\pi)e^{4\pi^2}.$$

24. $f(x, y, z)=2x^3+yz^2-xyz$ এর ক্ষেত্রে অয়লারের উপপাদ্যের সত্যতা পরীক্ষা কর।

25. প্রমাণ কর :

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z)$$; যেখানে $m\leqslant n$. (n = সমমাত্রিক ফাংশন f এর মাত্রা)

26. যদি $u=(1-2xy+y^2)^{-1/2}$ দেখাও যে

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

27. যদি $f(x, y)=0$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_x{}^2f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y{}^2f_{xx}}{f_y{}^3}.$$

28. যদি $f(x, y, z)=0$ হয়, প্রমাণ কর

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

যদি $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=c$ হয়, তবে উপরোক্ত সমতা পরীক্ষা কর।

29. যদি $u(x, y, z)=0$, $v(x, y, z)=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{u_z v_x-u_x v_z}{u_z v_y-u_y v_z}.$$

30. (i) যদি $u=f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$ হয়, প্রমাণ কর

$$x^2u_x=y^2u_y$$

(ii) যদি $u=f\left(\frac{x}{y}\right)+y\phi\left(\frac{x}{y}\right)$ হয়, প্রমাণ কর

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0.$$

(iii) যদি $v=\log r$ এবং $r^2=x^2+y^2+z^2$ হয়, প্রমাণ কর

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{r^2}.$$

(iv) যদি $u=f(2xt-t^2)$ হয়, প্রমাণ কর

$$(x-t)u_x=tu_t.$$

(v) যদি $B=y\frac{\partial}{\partial y}$ এবং $B=xy^{-1}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(AB)u-(BA)u=-Bu.$$

তৃতীয় খণ্ড

(প্রয়োগ)

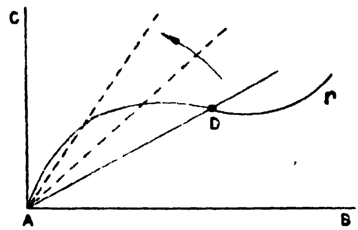
দশম অধ্যায়

স্পর্শক ও অভিলম্ব

10.01 প্রাথমিক মন্তব্য : অন্তরকলনবিদ্যার বিভিন্ন জ্যামিতিক প্রয়োগগুলির মধ্যে এখানে আমরা প্রধাণত স্পর্শক (tangent) ও অভিলম্ব (normal) সম্বন্ধীয় প্রয়োগগুলি বিশেষভাবে আলোচনা করব। যদিও স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ধারণা থেকে স্পর্শক ও অভিলম্ব সম্বন্ধে আমরা কিছু কিছু জেনেছি, কিন্তু যে কোন বক্ররেখার যে কোন একটি বিন্দুতে যে স্পর্শক পাওয়া যায় সে সম্বন্ধে সাধারণভাবে আলোচনা করা হয়নি। যেমন স্পর্শকের সংজ্ঞা থেকে আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে দেখেছি যে একটি জ্যা যদি একটি শংকুর সামতলিক ছেদরেখাকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং জ্যাটিকে যদি এমনভাবে সরান হয় যে ছেদবিন্দু দুইটি একই বিন্দুতে পরিণত হয় তবে শেষোক্ত অবস্থায় জ্যাটি স্পর্শক হয়ে যায়। এই ধরণের সংজ্ঞাতে আমরা স্পষ্টতই দেখতে পাই যে এখানে সীমার ধারণা নিহিত, কিন্তু উহার কোনরকম সুস্পষ্ট উল্লেখ দেখা যায় না। অন্তরকলন বিদ্যার ভিত্তি এই সীমার ধারণার উপর। সুতরাং অন্তরকলন বিদ্যার পরিভাষায় আমরা স্পর্শকের সংজ্ঞা বলতে বুঝব যে কোন জ্যা যদি কোন একটি বক্ররেখাকে P এবং Q এই দুই বিন্দুতে ছেদ করে এবং জ্যাটিকে এমনভাবে সরান হয় যে বক্ররেখার উপর P ও Q অবস্থিত হয়ে যদি $Q \to P$ হয়, তবে সেই ·াস্থ অবস্থায় PQ জ্যা P বিন্দুতে একটি স্পর্শক হয়। অতএব পরবর্তী সংজ্ঞার পরিপ্রেক্ষিতে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির সংজ্ঞাটি অস্পষ্ট বা অসম্পূর্ণ। কারণ প্রথম ক্ষেত্রে আমরা যেখানে বলেছি $Q = P$ সেখানে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বলা হয়েছে $Q \to P$, কিন্তু অন্তরকলন বিদ্যার সীমার অধ্যায়ে আমরা জেনেছি $Q \to P$ ও $Q = P$ এই দুইটি সম্পূর্ণ ভিন্ন জিনিষ। তাহলে প্রাক-অন্তরকলন বিদ্যায় আমরা স্পর্শক ও অভিলম্ব সম্বন্ধে যা যা জেনেছি, সীমার ধারণা না থাকায় তাদের সঠিকভাবে ব্যাখ্যা করা সম্ভব হয়নি। এখানে অন্তরকলন বিদ্যার প্রয়োগ করে স্পর্শক ও অভিলম্ব সম্বন্ধীয় আলোচনাগুলি নূতনভাবে সীমার ধারণার সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হবে। প্রসঙ্গত উল্লেখ করা যায় যে নিউটন ও লাইবনিজের আগে স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে স্পর্শকের আলোচনা করার সময় প্রকৃতপক্ষে কলনবিদ্যার প্রতীক ব্যবহার করে সচেতনভাবে আলোচনা করা হয়নি, পরে নিউটন ও লাইবনিজই প্রতীক ব্যবহার করে সচেতনভাবে কলনবিদ্যার আলোচনা করেন।

10.02 স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা

এখানে মনে করা যাক Γ এমন একটি বক্ররেখা যাহার উপর A বিন্দুটি অবস্থিত,

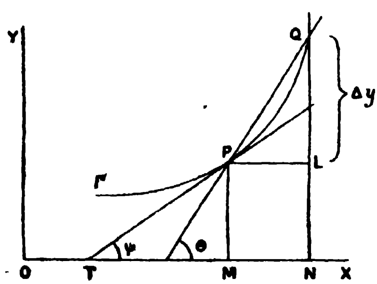


এখন যদি আমরা ঐ Γ বক্ররেখাটির উপর A এর সন্নিকটস্থ আর একটি দ্বিতীয় বিন্দু D লই তবে A ও D এই দুইটি বিন্দু যোগ করিলে একটি জ্যা AD পাওয়া যাবে। এখন ধরা যাক যে, A কে কেন্দ্র করে AD সরলরেখাটি চিত্র নির্দেশিত পথে এমনভাবে ঘুরতে সুরু করে যাতে দ্বিতীয় ছেদ-বিন্দুটি অর্থাৎ D বিন্দুটি ক্রমশ A বিন্দুর দিকে বক্ররেখাটি বরাবর আসে। এভাবে দেখা যাবে বক্ররেখাটির উপর অবস্থিত থেকে যখন $D \to A$ তখন এই সীমায় AD ছেদক উহার সীমাস্থ অবস্থান AC তে আসে এবং আমরা AC রেখাকে Γ বক্ররেখাটির A বিন্দুতে একটি স্পর্শক বলি।

আবার যদি AC এই স্পর্শকটির A বিন্দুটি দিয়া AB লম্বটি টানা যায় তবে বলা হবে AB সরলরেখাটি উপরোক্ত Γ বক্ররেখাটির A বিন্দুতে একটি অভিলম্ব। সুতরাং বুঝা গেল যে স্পর্শক ও অভিলম্ব উভয়েই উভয়ের লম্ব।

10.03 অন্তরকলনের সাহায্যে y = f(x) বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

এবার মনে করি, Γ একটি অবিচ্ছিন্ন (continous) বক্ররেখা এবং ধরা যাক, এই বক্ররেখাটির সমীকরণ $y = f(x)$; এখন মনে করা যাক ঐ Γ বক্ররেখাটির উপর P যে



কোন একটি বিন্দু, এবং OX ও OY এই অক্ষদ্বয় সমকোণে অবস্থিত (rectangular axes) ; Q ঐ Γ বক্ররেখাটির উপর P সন্নিকটস্থ আর একটি বিন্দু।

এখন OX এই অক্ষটির উপর P ও Q বিন্দু দুইটি থেকে যথাক্রমে PM এবং QN এই লম্ব দুইটি টানা হল। এবার QN রেখাটির উপর L বিন্দুতে PL লম্ব টানতে হবে। অতএব আমরা পাই

$$PL = MN = ON - OM$$

$$\text{এবং} \quad QL = QN - LN = QM - PM$$

মনে করি, P ও Q এই বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং $(x+\triangle x, y+\triangle y)$.

$$\text{সুতরাং} \quad PL = x + \triangle x - x = \triangle x$$

$$\text{এবং} \quad QL = y + \triangle y - y = \triangle y$$

আবার PQ রেখাটির সমীকরণ আমরা জানি,

$$Y - y = \frac{(y+\triangle y) - y}{(x+\triangle x) - x}(X - x) = \frac{\triangle y}{\triangle x}(X - x),$$

যেখানে PQ রেখার উপর (X, Y) চলবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। এখন যদি মনে করা যায় PQ রেখাটি X অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করেছে তাহলে PQ রেখাটির নতি (gradient) হবে,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{QL}{PL} = \tan\theta \qquad (1)$$

আবার যেহেতু Q বিন্দুটি P বিন্দুর অভিমুখী (অর্থাৎ $Q \to P$) অতএব PQ রেখাটি ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সীমাস্থ অবস্থান PT এর দিকে অগ্রসর হবে, তাহলে এখন দেখা যায় $\triangle x \to 0$ এবং $\theta \to \psi$.

সুতরাং সমীকরণ (1) কে অন্তরকলনের সংজ্ঞা থেকে এইভাবে সীমাস্থ অবস্থায় দেখান যেতে পারে যে $\tan\psi = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$.

অতএব দেখা গেল যে একটি অবিচ্ছিন্ন বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু (x, y) তে অন্তরকলজ $\frac{dy}{dx}$ বলতে বুঝা যায় যে ঐ বক্ররেখাটির উপর (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটি X অক্ষের সহিত ধনাত্মক দিকে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার ত্রিকোণমিতিক ট্যানজেণ্ট (tangent)।

সুতরাং যে কোন একটি বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দুতে অন্তরকলজ বলিতে বুঝায় ঐ বক্ররেখার উপরে (x, y) যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির নতিকে (slope) অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}=\tan\psi$। নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় বিষয়গুলি ভালভাবে লক্ষ্য করা উচিত ঃ—

যদি কোন একটি বক্ররেখা $y=f(x)$ এর যে কোন একটি বিন্দু (x, y) তে

(1) $\frac{dy}{dx}=1$ হয়, তাহলে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হবে এক অর্থাৎ ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির উপর স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত ধনাত্মক দিকে পয়তাল্লিশ ডিগ্রী (45°) কোণ উৎপন্ন করে।

(2) $\frac{dy}{dx}=0$ হয়, তবে বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত ধনাত্মক দিকে 0° কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকটি তখন x-অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয়।

(3) $\frac{dx}{dy}=0$ হয়, তাহলে বক্ররেখার ঐ বিন্দুতে স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত $\frac{\pi}{2}$ কোণ সৃষ্টি করে। অর্থাৎ তখন বক্ররেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত লম্বভাবে থাকে।

(4) $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক হয়, তবে বক্ররেখার ঐ বিন্দুটিতে স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত ধনাত্মক দিকে একটি স্থূল কোণ উৎপন্ন করে।

মনে করি যে কোন বক্ররেখার সমীকরণ $Y=f(X)$; এখন যদি ধরা যায় বক্ররেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু (x, y) দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকটি X-অক্ষের সহিত ψ কোণ সৃষ্টি করে তবে আমরা লিখতে পারি

$$m=\tan\psi=\left[\frac{dY}{dX}\right]_{X=x}=f'(x)$$

এখানে m হইতেছে $Y=f(X)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটির নতি। এখন আমরা বলতে পারি যে এই নতি (slope) বলতে $Y=f(X)$ বক্ররেখাটির নতিকেই বুঝায়।

সুতরাং দেখা যায় $Y=f(X)$ বক্ররেখার উপর (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}-\mathbf{y}&=m(X-x)\\&=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,(\mathbf{X}-\mathbf{x})\end{aligned}$$

10.04 f(x, y) = 0 দ্বারা প্রকাশিত বক্ররেখার উপর যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির বহুক্ষেত্রে বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y) = 0$ লেখা হয়।

এক্ষেত্রে আমরা জানি যে, যখন কোন একটি বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y) = 0$ আকারে দেওয়া থাকে তখন আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right] = -\frac{f_x}{f_y},\ (f_y \neq 0).$$

তাহলে এখন $f(x, y) = 0$ বক্ররেখাটির উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণের জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর স্থানে লিখিতে পারি

$$y - y_1 = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_1\\y=y_1}}(x - x_1)$$

বা, $$(x - x_1)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} + (y - y_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = 0$$

বা, $$(x - x_1)\,(f_x)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} + (y - y_1)\,(f_y)_{\substack{x=x_1\\y=y_1}} = 0$$

10.05 x = f(t) এবং y = F(t) দ্বারা প্রকাশিত বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় :

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে কখন কখন বক্ররেখাটির সমীকরণ $x = f(t)$, $y = F(t)$ লেখা হয়, অতএব আমরা পাই

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \text{ এবং } \frac{dy}{dt} = F'(t)$$

সুতরাং $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{F'(t)}{f'(t)},\ f'(t) \neq 0.$$

এভাবে যে কোন একটি বিন্দু t_1 এ স্পর্শকের সমীকরণ অর্থাৎ $x = f(t)$, $y = F(t)$ বক্ররেখার উপর $\{f(t_1),\ F(t_1)\}$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে

$$y - F(t_1) = \frac{F'(t_1)}{f'(t_1)}\ \{x - f(t_1)\}$$

বা, $$[x - f(t_1)]\cdot F'(t_1) - [y - F(t_1)]\,f'(t_1) = 0$$

10.06 স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে স্পর্শকের উপরোক্ত সমীকরণের প্রয়োগ

এই অনুচ্ছেদে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির কয়েকটি বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করে দেখানো হবে অন্তরকলন বিদ্যার সুবিধা ও প্রয়োজনীয়তা।

উদাহরণ 1. $x^2+y^2=a^2$ এই বৃত্তটির উপর যে কোন একটি বিন্দু (x_1, y_1) এ স্পর্শকের সমীকরণটি বাহির কর।

সমাধান। বৃত্তটির সমীকরণ দেওয়া আছে

$$x^2+y^2=a^2$$

$$\text{বা,}\quad y^2=a^2+x^2 \qquad (1)$$

এখন (1) নং সমীকরণকে উভয়পক্ষকে অন্তরকলন করার পর পাওয়া যায়,

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

অতএব (x_1, y_1) এই বিন্দুটিতে স্পর্শকটির সমীকরণ হবে

$$y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}(x-x_1)$$

$$\text{বা,}\quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

$$\text{বা,}\quad yy_1-y_1^2=-xx_1+x_1^2$$

$$\text{বা,}\quad xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2$$

$$\text{বা,}\quad xx_1+yy_1=a^2$$

[যেহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত]

[**প্রয়োজনীয় মন্তব্য ঃ** স্থানাঙ্ক-জ্যামিতিতে বৃত্তের এই স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করার পদ্ধতিটি পর্যালোচনা করা যাক।

স্থানাঙ্ক-জ্যামিতিতে (x_1, y_1) বিন্দুটির সন্নিকটে বক্ররেখার উপর আর একটি বিন্দু (x_2, y_2) নেওয়া হয়। তারপর PQ জ্যার সমীকরণ লেখা হয় নিম্নরূপ ঃ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \cdots \qquad (1)$$

কিন্তু (1) তে $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসানো হয় না, কারণ প্রকৃতপক্ষে এরূপ বসালে

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ এর মান $\dfrac{0}{0}$ হয়। অতএব স্থানাঙ্ক-জ্যামিতির সংজ্ঞানুযায়ী $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসানোর সঠিক মুহূর্ত এখন নয়। তাই নিম্নলিখিত বীজগণিতিক সমতার আশ্রয় নেওয়া হবে

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \qquad \cdots \qquad (2)$$

সমতাটি পাওয়া যায় নিম্নলিখিত দুইটি অভেদ থেকে

$$x_1{}^2+y_1{}^2=a^2$$

$$\text{এবং}\quad x_2{}^2+y_2{}^2=a^2.$$

পরে (1) তে $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ এর মান (2) থেকে বসিয়ে পাওয়া যায়

$$y-y_1=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1).$$

এখন $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসানোর ঠিক মুহূর্ত উপস্থিত, কারণ এখন $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসালে $-\dfrac{x_2+x_1}{y_2+y_1}$ এর মান আর $\dfrac{0}{0}$ নয়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির এই ষড়যন্ত্র লক্ষণীয়।

অতএব আমরা পাই

$$y-y_1=-\frac{2x_1}{2y_1}(x-x_1)$$

$$=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

তাহলে (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের নতি $\left(\text{অর্থাৎ } -\dfrac{x_1}{y_1}\right)$ পাওয়ার জন্য স্থানাঙ্ক-জ্যামিতিতে কিরূপ পরিশ্রম করতে হলো বুঝা গেল, অন্যদিকে এই নতি কলন-বিদ্যায় সহজেই পাওয়া গিয়েছিল। আমাদের দেশে প্রাক-স্নাতকস্তরে যখন কলন-বিদ্যা শেখানো হয় তখন স্থানাঙ্ক-জ্যামিতিতে এই ধরণের নতি নির্ণয় করা কেন যে শেখানো হয় তা চিন্তা করলে বিস্ময়ের উদ্রেক হয়।]

উদাহরণ 2. $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির সমীকরণ বাহির কর।

সমাধান : এখানে অধিবৃত্তটির সমীকরণ দেওয়া আছে যে $Y^2=4aX$, উভয়দিকে X এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাওয়া যায়,

$$2Y\frac{dY}{dX}=4a$$

$$\text{বা,}\quad \frac{dY}{dX}=\frac{2a}{Y}$$

সুতরাং, (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি হবে

$$Y-y=\left[\frac{dY}{dX}\right]_{\substack{X=x\\Y=y}}(X-x)$$

$$\text{অথবা,}\quad Y-y=\frac{2a}{y}(X-x)$$

$$\text{বা,}\quad Yy-y^2=2a\,(X-x)$$

$$\text{বা,}\quad Yy-y^2=2aX-2ax$$

$$\text{বা,}\quad Yy-4ax=2aX-2ax\quad (\because\ y^2=4ax)$$

$$\text{বা,}\quad Yy=2a\,(X+x)$$

মন্তব্য : এইভাবে $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ বক্ররেখা দুইটির উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক নির্ণয় করা যেতে পারে।

10.07 মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

যদি কোন বক্ররেখা যার বীজগণিতিক সমীকরণ দেওয়া আছে এবং উহা যদি মূল বিন্দুটি দিয়া যায়, তবে ঐ বক্ররেখাটির সমীকরণে অবস্থিত ন্যূনতম ঘাতযুক্ত পদ-গুলিকে শূন্যের সহিত সমান করলে মূলবিন্দুতে উহার স্পর্শকের (বা স্পর্শকগুলির) সমীকরণ পাওয়া যাবে।

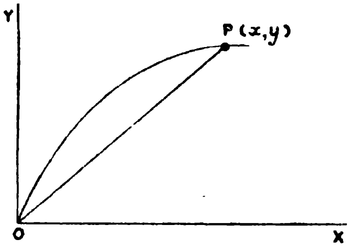
প্রমাণ : মনে করি মূলবিন্দুটি দিয়া যায়, এমন একটি বক্ররেখার সমীকরণ নিম্নরূপ

$$a_1x+b_1y+a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+\cdots+a_nx^n+b_nx^{n-1}y+\cdots$$
$$+k_ny^n=0 \qquad \cdots\quad (1)$$

এখন মনে করি ঐ বক্ররেখাটির উপর P এমন একটি বিন্দু যার স্থানাঙ্ক (x, y)। অতএব OP রেখার সমীকরণ হবে,

$$Y=\frac{y}{x}X$$

আবার যদি মনে করা যায় P বিন্দুটি ধীরে ধীরে O বিন্দুর দিকে অগ্রসর হচ্ছে অর্থাৎ যখন $P \to O$, তখন $x \to 0$ (শূন্য) ও $y \to 0$ (শূন্য), তাহলে OP রেখাটি ক্রমশ ঐ



বক্ররেখাটির O বিন্দুতে একটি স্পর্শকরূপে দেখা দেয়। সুতরাং বক্ররেখাটির O বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হইবে,

$$Y = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(\frac{y}{x}\right) X$$

বা $\quad Y = mX$, যেখানে $m = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{y}{x}$

অতএব মূলবিন্দুগামী স্পর্শকটির নতি (gradient) হবে,

$$\lim_{\substack{x = 0 \\ y = 0}} \frac{y}{x}$$

মনে করা যাক m সান্ত, অর্থাৎ m এর একটি সুনির্দিষ্ট মান আছে। সুতরাং এখানে বলা যায় মূলবিন্দুগামী স্পর্শকটিই Y অক্ষ নয়। (m এর মান সান্ত না হলে কি পরিণতি হবে তা পরে আলোচনা করা হবে)

এখন বক্ররেখাটির সমীকরণকে x দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়,

$$a_1 + b_1\ y/x + a_2 x + b_2 y + c_2 y \cdot y/x + \cdots = 0$$

প্রথমত ধরি, $b_1 \neq 0$ এবং এই অবস্থায় $x \to 0,\ y \to 0$ এই সীমা নিলে পাওয়া যায়, $\quad a_1 + b_1 m = 0$

$\therefore \quad m = -\frac{a_1}{b_1}$. অতএব মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি দেখা যায়

$$Y = -\frac{a_1}{b_1} X$$

বা, $\quad a_1 X + b_1 Y = 0$

সুতরাং (1) নং সমীকরণের ন্যূনতম ঘাতযুক্ত পদগুলিকে শূন্যের সহিত সমান করলে উপরোক্ত সমীকরণটি পাওয়া যায়।

দ্বিতীয়ত মনে করি $b_1=0$, তাহলে $a_1=0$, তাহলে বক্ররেখাটির সমীকরণটি, $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+\ \cdots\ +a_nx^n+b_nx^{n-1}y+\ \cdots\ +k_ny^n=0$ ।
অতএব এবার বক্ররেখার সমীকরণটিকে x^2 দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যাবে,

$$a_2+b_2\frac{y}{x}+c_2\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ \cdots\ =0 \quad (b_2\neq 0,\ c_2\neq 0)$$

আবার, এখানে $x\to 0$, $y\to 0$, এই সীমাস্থ অবস্থানে দেখা যায়,

$$a_2+b_2m+c_2m^2=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

এখন আমরা জানি স্পর্শকের সমীকরণটি $Y=mX$ $\cdots$ $\cdots$ (ii)

এবার (i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটি থেকে m কে অপনয়ণ করার পর মূলবিন্দুতে দুইটি স্পর্শকের জন্য সমীকরণ পাওয়া যায়,

$$a_2+b_2\frac{Y}{X}+c_2\left(\frac{Y}{X}\right)^2=0$$

$$\text{বা,}\quad a_2X^2+b^2XY+c_2Y^2=0$$

উপরোক্ত সমীকরণটি সমমাত্রিক বলে দুটি সরলরেখা নির্দেশ করে।

মন্তব্য : (i) আবার, যদি $a_1=b_1=a_2=b_2=c_2=0$ হয় তবে আমরা একই উপায়েই আলোচনা করতে পারি।

(ii) এখন মনে করি মূলবিন্দুতে স্পর্শক Y অক্ষরেখা অর্থাৎ তখন $1/m\to 0$ (অর্থাৎ m এর মান সান্ত নয়) বা $x/y\to 0$. এখানে আলোচ্য সমীকরণটিকে y দ্বারা ভাগ করলে (এক্ষেত্রে $a_1\neq 0$, ধরতে হবে) এবং $x\to 0$, $y\to 0$ মনে করলে নিম্নলিখিত উপায়ে বক্ররেখাটির সমীকরণটিকে পরিবর্তিত আকারে লেখা যেতে পারে যেখানে $b_1=0$; যেমন $a_1x+a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+\cdots\cdots=0$; এ ক্ষেত্রেও আমাদের উপরোক্ত পদ্ধতিটিকে প্রয়োগ করতে হবে।

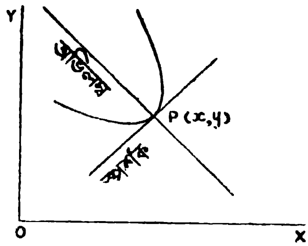
উদাহরণ 1.

মনে করা যাক, একটি বক্ররেখার সমীকরণ $2x-3y+x^2+5xy+6y^2=0$. অতএব (0, 0) বিন্দুতে অর্থাৎ মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি হবে $2x-3y=0$

উদাহরণ 2.

মনে করি একটি বক্ররেখার সমীকরণ $x^2+5xy+6y^2+7x^3-8x^2y+y^3=0$, সুতরাং এখানে মূলবিন্দুতে স্পর্শকগুলির সমীকরণ হবে, $x^2+5xy+6y^2=0$

10.08 অভিলম্বের সমীকরণ : সংজ্ঞা থেকে আমরা জানি যে, কোন একটি বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাটি যা বক্ররেখাটির ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির সহিত লম্ব, তাহাকে বক্ররেখাটির ঐ বিন্দুতে অভিলম্ব বলা হয়।



(a) মনে করি, $y=f(x)$ এই বক্ররেখাটির উপরে যে কোন একটি বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y), এখন আমরা জানি যে, ঐ (x, y) বিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ হয়, $Y-y=m(X-x)\cdots$ (i) এখানে m, সরলরেখাটির নতি।

এবার যদি মনে করা যায় যে, উপরোক্ত সরলরেখাটি (x, y) বিন্দুটিতে একটি অভিলম্ব, উহাকে অবশ্যই $y=f(x)$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত ঐ বিন্দুতে লম্ব হতে হবে। অর্থাৎ উহাকে $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)\cdots\cdots$(ii) এই স্পর্শকটির সহিত লম্ব হতে হবে। কিন্তু যেহেতু আমাদের জানা আছে যে, দুইটি সরলরেখা পরস্পরের লম্ব হওয়ার সর্ত এই যে উহাদের নতিদ্বয়ের গুণফল '-1' এর সমান অর্থাৎ $m_1 \times m_2=-1$ হতে হবে। সুতরাং এখানে আমরা লিখিতে পারি,—(i) ও (ii) নং সমীকরণগুলির ক্ষেত্রে $m\frac{dy}{dx}=-1$. অতএব পাওয়া যায় $m=-\frac{1}{dy/dx}$. এখন m এর এই সান্ত মান (i) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপিত করলে পাওয়া যাবে,

$$Y-y=-\frac{1}{dy/dx}(X-x) \text{ বা } (X-x)+\frac{dy}{dx}(Y-y)=0\cdots\cdots \text{(iii)}$$

এবং (iii) বলা হবে, $y=f(x)$ এই বক্ররেখাটির (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ।

(b) আবার মনে করি, $f(x, y)=0$ কোন একটি বক্ররেখার সমীকরণ। এখন আমরা জানি যে,

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right]=-\frac{f_x}{f_y}$$

অতএব (iii) নং সমীকরণে উপরোক্ত $\frac{dy}{dx}$ এর মান বসালে পাওয়া যায়

$$(X-x)+\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)(Y-y)=0$$

বা, $$(X-x)=\frac{f_x}{f_y}(Y-y)$$

বা, $$\frac{X-x}{f_x}=\frac{Y-y}{f_y} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এখন উপরোক্ত (iv) নং সমীকরণটিকে বলা হবে (x, y) বিন্দুতে $f(x, y)=0$ বক্ররেখার অভিলম্ব।

(c) এবার যদি মনে করা যায় বক্ররেখাটির সমীকরণ $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$, তবে t বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হবে $\phi'(t)X+\psi'(t)Y=\phi(t)\phi'(t)+\psi(t)\psi'(t)$.

উদাহরণ 1. $x^2y+xy^2=a^3$ এই বক্ররেখাটির যে কোন বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

উত্তর : এখানে আমাদের দেওয়া আছে

$$f(x, y)\equiv x^2y+xy^2-a^3=0$$

$\therefore \quad f_x=2xy+y^2$ এবং $f_y=x^2+2xy$

সুতরাং (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$\frac{X-x}{2xy+y^2}=\frac{Y-y}{x^2+2xy}$$

উদাহরণ 2. $y^2=4ax$ বক্ররেখাটির (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ বাহির কর।

উত্তর : বক্ররেখার সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{dy}{dx}\cdot 2y=4a$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=\frac{2a}{y}$$

অতএব (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$(X-x)+\frac{2a}{y}(Y-y)=0.$$

10.09 দুইটি বক্ররেখার ছেদ কোণ নির্ণয় (angle of intersection)

দুইটি বক্ররেখার ছেদ কোণ বলতে বুঝায়, দুইটি বক্ররেখার ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটিকে। এখন মনে করি, $\phi(x, y)=0$ এবং $\psi(x, y)=0$, যে কোন দুইটি বক্ররেখার সমীকরণ এবং ধরা যাক এরা (x, y) বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করেছে।

এখন আমরা জানি যে (x, y) বিন্দুটিতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$(X-x)\phi_x+(Y-y)\phi_y=0$$

এবং $(X-x)\psi_x+(Y-y)\psi_y=0$

অথবা,

$$X\phi_x+Y\phi_y-x\phi_x-y\phi_y=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$X\psi_x+Y\psi_y-x\psi_x-y\psi_y=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এখন আমরা (i) ও (ii) সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ α কে লিখতে পারি

$$\tan\alpha=\frac{\phi_x\psi_y-\psi_x\phi_y}{\phi_x\psi_x+\phi_y\psi_y}$$

বা, $\alpha=\tan^{-1}\left(\dfrac{\phi_x\psi_y-\psi_x\phi_y}{\phi_x\psi_x+\phi_y\psi_y}\right)$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি বক্ররেখাদ্বয় পরস্পর স্পর্শ করে, অর্থাৎ যখন দুইটি স্পর্শক পরস্পর মিলিত হয় তখন $\alpha=0, \quad \therefore \quad \tan\alpha=0$

সুতরাং $\dfrac{\phi_x\psi_y-\psi_x\phi_y}{\phi_x\psi_x+\phi_y\psi_y}=0, \qquad \phi_x\psi_y-\psi_x\phi_y=0$

বা, $\dfrac{\phi_x}{\psi_x}=\dfrac{\phi_y}{\psi_y}$

অনুসিদ্ধান্ত 2. যখন $\alpha=90^\circ$ তখন আমরা জানি,

$$\cot\alpha=0, \qquad 1\Big/\left(\frac{\phi_x\psi_y-\psi_x\phi_y}{\phi_x\psi_x+\phi_y\psi_y}\right)=0$$

তাহলে; এই অবস্থায় বলা যেতে পারে যে, $\phi_x\psi_x+\phi_y\psi_y=0$

উদাহরণ : $x^2-y^2=a^2$ এবং $x^2+y^2=a^2\sqrt{2}$ এই দুইটি বক্ররেখার ছেদ কোণটি বাহির কর।

উত্তর : বক্ররেখার সমীকরণ দুইটিকে যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$2x^2=a^2(1+\sqrt{2})$$

$$\text{বা,}\quad x=\pm\frac{a\sqrt{(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}\equiv\alpha$$

আবার উপরোক্ত সমীকরণ দুইটি বিয়োগ করলে পাওয়া যায়,

$$2y^2 = a^2(-1+\sqrt{2})$$

$$\text{বা,} \quad y = \pm \frac{a\sqrt{(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{2}} \equiv \beta$$

এখন, বক্ররেখার সমীকরণ দুইটিকে নিম্নলিখিত ভাবে সাজিয়া লেখা যায়,

$$f(x, y) \equiv x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

$$\text{এবং} \quad F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - a^2\sqrt{2} = 0$$

এখন মনে করি, (x, y) বিন্দুতে বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদ কোণ θ

$$\text{অতএব } \tan\theta = \frac{2x\cdot 2y - (2x)(-2y)}{2x\cdot 2x + (-2y)(2y)}\bigg|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}}$$

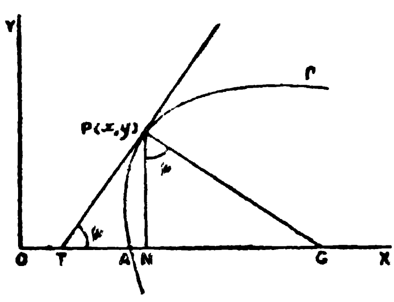
$$= \frac{2xy}{x^2-y^2}\bigg|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = \frac{2xy}{a^2}\bigg|_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} \quad \left[\because \begin{array}{c} x^2-y^2 \\ = a^2 \end{array}\right]$$

$$= \frac{2a^2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,a^2} = 1$$

$$\therefore \quad \theta = 45^\circ \text{ বা } \frac{\pi}{4}.$$

10.10 উপস্পর্শক ও উপঅভিলম্ব (Subtangent and Subnormal) :

মনে করি, Γ এই বক্ররেখাটির উপর P একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (x, y). এখন ধরা যাক, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্ব দুইটি X অক্ষের সহিত যথাক্রমে T ও G বিন্দুতে মিলিত হয়, এবার মনে করি PN লম্বটি OX অক্ষটির উপর P বিন্দু হইতে টানা হল। তাহলে, এখন TN অংশটুকুকে বলা হবে উপস্পর্শক (subtangent) এবং NG কে বলা হবে উপ-অভিলম্ব (subnormal).



এখন চিত্রটি থেকে পাওয়া যায় PTN এবং PNG এই দুটি সমকোণী ত্রিভুজে $\angle GPN = \angle PTN = \psi$ এবং মনে করি $PN = y$.

$\therefore$ উপস্পর্শক $TN = PN \cot \psi = \dfrac{PN}{\tan \psi} = \dfrac{y}{dy/dx}$ $\left[\because \tan \psi = \dfrac{dy}{dx}\right]$

অতএব কার্টেসীয় উপস্পর্শক $= \dfrac{ydx}{dy}$

আবার, উপ-অভিলম্ব $NG = PN \tan \psi = PN \dfrac{dy}{dx}$

$$= y \frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$ কার্টেসীয় উপাভিলম্ব $= \dfrac{ydy}{dx}$

মন্তব্য : PT কে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য এবং PG কে অভিলম্বের দৈর্ঘ্য বলা হয়।

উদাহরণ : $y = be^{x/a}$ এই বক্ররেখাটির জন্য দেখাও যে, উপস্পর্শক একটি ধ্রুবক এবং ইহার উপাভিলম্ব y^2/a.

উত্তর : এখানে আমাদের দেওয়া আছে যে,

$$y = be^{x/a}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} e^{x/a}$$

$$\therefore \quad \text{উপাভিলম্ব} = \frac{ydy}{dx} = be^{x/a} \cdot \frac{b}{a} e^{x/a}$$

$$= \frac{b^2}{a} \cdot e^{2x/a} = (be^{x/a})^2/a$$

$$= y^2/a$$

আবার, উপস্পর্শক $= \dfrac{ydx}{dy} = y \Big/ \dfrac{dy}{dx} = be^{x/a} \Big/ \dfrac{be^{x/a}}{a}$

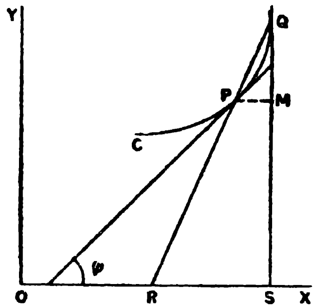
$$= a \text{ (ধ্রুবক)}$$

অতএব, প্রমাণ করা গেল যে, $y = be^{x/a}$ বক্ররেখাটির উপস্পর্শক একটি ধ্রুবক এবং উপাভিলম্ব y^2/a.

10.11 চাপ দৈর্ঘ্যের কার্টেসীয় অন্তরকলজ (Derivative of Cartesian arc-length)

মনে করি কোন একটি বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ এই বিন্দুটি অবস্থিত এবং একই

সঙ্গে ধরা যাক ঐ বক্ররেখাটির উপর P বিন্দুর নিকটস্থ একটি বিন্দু $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ আছে।



মনে করি বক্ররেখাটির উপর যে কোন একটি বিন্দু C থেকে P পর্যন্ত দৈর্ঘটুকু s এবং CQ চাপটির দৈর্ঘ্য মনে করি $s+\triangle s$. তাহলে স্বভাবতই দেখা যায় যে চাপ $PQ=\triangle s$. s তাহলে x এবং y এর একটি ফাংশন।

যখন বক্ররেখাটি অবিচ্ছিন্ন এবং স্পর্শকগুলি অবিচ্ছিন্নভাবে ঘূর্ণায়মান হয় তখন

$$\lim_{Q\to P} \frac{\text{জ্যা দৈর্ঘ্য } PQ}{\text{চাপ দৈর্ঘ্য } PQ}=1$$ (এর প্রমাণ এ পুস্তকের গণ্ডীর বাহিরে)

সুতরাং যখন $Q\to p$, তখন,

$$(\text{চাপ } PQ)^2 = PM^2+QM^2=(\triangle x)^2+(\triangle y)^2$$

বা, $$\frac{(\text{চাপ } PQ)^2}{(\triangle x)^2}=1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2$$

বা, $$\left(\frac{\text{চাপ } PQ}{\triangle s}\right)^2\left(\frac{\triangle s}{\triangle x}\right)^2=1+\left(\frac{\triangle y}{\triangle x}\right)^2$$

আবার, যখন $Q\to P$ তখন $\triangle x\to 0$, অতএব আমরা পাই,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

বা, $$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

আবার যেহেতু, $$\frac{ds}{dx}=\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$$

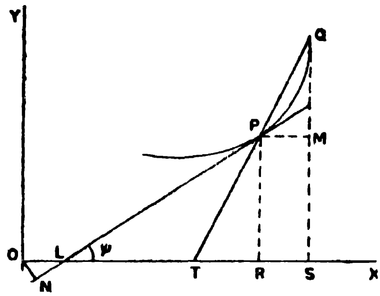
অতএব (i) নং সমীকরণের উভয়দিকে $\frac{dx}{dy}$ দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়,

$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

10.12 sin ψ এবং cos ψ এর মান নির্ণয়

ধরা যাক একটি বক্ররেখাটির উপর $P(x, y)$ ও $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ যে কোন দুইটি কাছাকাছি অবস্থিত বিন্দু। মনে করি $CP = s$ এবং $CQ = s + \Delta s$.

$\therefore \quad PQ = CQ - CP = \Delta s$. P ও Q বিন্দু থেকে OX এর উপর PR ও QS লম্ব দুটি যথাক্রমে টানা হল, এবং QS এই রেখাটির উপর এখন P বিন্দু হইতে PM লম্ব টানা হল। P ও Q বিন্দুদ্বয় যোগ করে OX পর্যন্ত বর্দ্ধিত করা হল।



PQ রেখাটি বক্ররেখার একটি জ্যা। এখন যদি মনে করা যায় $Q \to P$, তাহলে দেখা যাবে আলোচ্য সরলরেখাটি P বিন্দুতে বক্ররেখাটির সহিত একটি স্পর্শক সৃষ্টি করছে, যার বর্দ্ধিত অংশ X অক্ষের সহিত মনে করি ψ কোণ সৃষ্টি করে।

এখন $\triangle PQM$ ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

$$\sin QPM = \frac{QM}{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{PQ}.$$

আবার উপরে আমরা দেখেছি যে, $Q \to P$ এই সীমা অবস্থানে QP রেখাটি P বিন্দুতে একটি স্পর্শকে পরিণত হয় এবং তখন ঐরূপ সীমা অবস্থানে $\angle QPM \to \psi$

ও $\Delta s \to 0$ এবং $\left[\frac{\text{চাপ } PQ}{\text{জ্যা } PQ}\right] = \frac{\Delta s}{PQ} \to 1$

$$\therefore \quad \sin \psi = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{dy}{ds}.$$

অনুরূপভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$\cos \psi = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{dx}{ds}.$$

এইভাবে $\quad \tan \psi = \dfrac{\sin \psi}{\cos \psi} = \dfrac{dy}{ds} \cdot \dfrac{ds}{dx} = \dfrac{dy}{dx}.$

এবং $\quad \cot \psi = \dfrac{1}{\tan \psi} = 1 \Big/ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dx}{dy}.$

আবার যেহেতু,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

এবং
$$\frac{ds}{dy}=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

সেহেতু (1) ও (2) নং সমীকরণদ্বয়ে $\frac{dy}{dx}$ ও $\frac{dx}{dy}$ এর মান দুটি বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\tan^2\psi}=\sec\psi$$

এবং
$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\cot^2\psi}=\operatorname{cosec}\psi$$

আবার আমরা সাধারণ ত্রিকোণমিতি থেকে জানি যে $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. সুতরাং আমরা পাই

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=1$$

উপরোক্ত সূত্রটির প্রয়োগও আমরা নিম্নলিখিত উপায়ে দেখাতে পারি, যেমন:

যদি মনে করা যায় যে, $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$,

তবে, $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, ও $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$

এখন, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right\}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$

বা, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ $\left[\because \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1\right]$

$\therefore$ $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$

10.13 মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

10.12 অনুচ্ছেদটিতে অঙ্কিত চিত্রে মনে করি মূলবিন্দু O থেকে স্পর্শকটির উপর N বিন্দুতে ON একটি লম্ব টানা হয়েছে। এখন যদি বক্ররেখার সমীকরণ $y=f(x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

এখন চিত্র থেকে পাওয়া যায়

$$ON = OL \sin\psi = (x - y\cot\psi)\sin\psi = x\sin\psi - y\cos\psi$$

কিন্তু $\cos\psi = \frac{dx}{ds} = 1\Big/\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$

এবং $\sin\psi = \frac{dy}{ds} = 1\Big/\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}} = \frac{dy}{dx}\Big/\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$

$$\therefore\quad |ON| = \left|\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}}\right|.$$

বিশেষ উদাহরণসমূহ ঃ

উদাহরণ 1. $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ এই বক্ররেখাটির উপর (x, y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটির সমীকরণ বাহির কর।

উত্তর ঃ এখানে বক্ররেখাটির সমীকরণ দেওয়া আছে যে,

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$$

$$\therefore\quad \frac{mx^{m-1}}{a^m} + \frac{my^{m-1}}{b^m}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{বা}\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}$$

$\therefore$ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি

$$Y - y = -\frac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}(X - x)$$

বা, $$\frac{Y\cdot y^{m-1}}{b^m} - \frac{y^m}{b^m} = -\frac{Xx^{m-1}}{a^m} + \frac{x^m}{a^m}$$

বা, $$\frac{Xx^{m-1}}{a^m} + \frac{Yy^{m-1}}{b^m} = \frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m}$$

$$\therefore\quad \frac{Xx^{m-1}}{a^m} + \frac{Yy^{m-1}}{b^m} = 1 \qquad \left[\because\ \frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1\right]$$

উদাহরণ 2. $x=a\cos 2\theta,\ y=2\sqrt{2}\,a\sin\theta$ এই বক্ররেখাটির θ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর।

উত্তর ঃ আমাদের দেওয়া আছে $x=a\cos 2\theta,\ \ y=2\sqrt{2}\,a\sin\theta$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\theta}=-2a\sin 2\theta,\ \text{আবার}\ \frac{dy}{d\theta}=2\sqrt{2}a\cos\theta$$

$$\text{সুতরাং,}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx}=2\sqrt{2}a\cos\theta/(-2a\sin 2\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{-\sin 2\theta}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sin\theta}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sin\theta}$$

অতএব স্পর্শকটির সমীকরণটি হয়

$$Y-2\sqrt{2}\ a\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}\sin\theta}(x-a\cos 2\theta)$$

বা, $\sqrt{2}\,Y\sin\theta-4a\sin^2\theta=-X+a(1-2\sin^2\theta)$

বা, $\sqrt{2}\ Y\sin\theta-4a\sin^2\theta=-X+a(1-2\sin^2\theta)$

বা, $\sqrt{2}\ Y\sin\theta+X=a(1+2\sin^2\theta)$

উদাহরণ 3. $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ এই উপবৃত্তটির যে কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ দুটি বাহির কর।

উত্তর ঃ এখানে আমাদের দেওয়া আছে যে,

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

$$\text{বা,}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\equiv f(x,y)=0$$

অতএব,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}\ \text{এবং}\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$$

$\therefore$ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ হয়

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \text{বা,}\ (X-x)\frac{2x}{a^2}+(Y-y)\frac{2y}{b^2}=0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{Xx}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

$$\text{বা,}\quad \frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

আবার (x, y) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটি হয়

$$\frac{X-x}{\partial f/\partial x}=\frac{Y-y}{\partial f/\partial y} \quad \text{বা,} \quad \frac{X-x}{\frac{2x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{2y}{b^2}}$$

বা, $2ya^2(X-x)=2xb^2(Y-y)$

বা, $ya^2X-xb^2Y=xy(a^2-b^2)$

বা, $\dfrac{a^2X}{x}-\dfrac{b^2Y}{y}=a^2-b^2.$

উদাহরণ 4. $x^2=4y$ এবং $y(x^2+4)=8$ এই বক্ররেখা দুইটির ছেদ-কোণটি নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ এখানে আমাদের দেওয়া আছে যে,

$$x^2=4y \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y(x^2+4)=8 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

দ্বিতীয় সমীকরণটিতে $x^2=4y$ বসালে পাওয়া যায়,

$$y(4y+4)=8 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

বা, $y^2+y=2,$ বা $y^2+y-2=0$

বা, $(y+2)(y-1)=0$ $\therefore$ $y=-2,$ বা $y=1$

আবার, এখানে দেখা যায় $y=-2$, গ্রহণীয় নয়।

অতএব এখন $x^2=4$ $\therefore$ $x=\pm 2$

সুতরাং বক্ররেখাটির ছেদবিন্দু $(x, y)\equiv(2, 1)$ এবং $(-2, 1)$

এবার, প্রথম বক্ররেখাটির জন্য আমরা পাই,

$$x^2=4y; \quad \therefore \quad 2x-4\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{বা,} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}=\tan\psi.$$

$$\therefore \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(2,1)}=1$$

আবার দ্বিতীয় বক্ররেখাটির জন্য পাওয়া যায়

$$\frac{dy}{dx}(x^2+4)+2xy=0$$

বা, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xy}{x^2+4}=\tan\psi'$; $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{(2,1)}=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\psi=\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$ এবং $\psi'=\tan^{-1}\dfrac{-2xy}{x^2+4}$

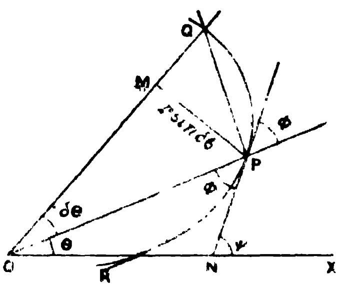
এখন $\psi - \psi' = \tan^{-1} \dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \tan^{-1} 3.$

আবার, $\tan \psi = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2}$; $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{(-2,1)} = -1$

এবং $\tan \psi' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy}{x^2+4}$ $\therefore$ $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{(-2,1)} = \frac{1}{2}$

$$\psi' - \psi = \tan^{-1} \frac{3/2}{1 + \frac{-1}{2} \times 1} = \tan^{-1} 3.$$

10.14 দূরকের সহিত স্পর্শকের কোণ নির্ণয় (angle between radius vector and tangent)



এখানে আমাদের দেখাতে হবে যে, $r = f(\theta)$ বক্ররেখাটির উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থানে অঙ্কিত স্পর্শকটি যদি দূরক OP এর সঙ্গে ϕ কোণ উৎপন্ন করে তবে

$$\tan \phi = \frac{rd\theta}{dr}, \quad \sin \phi = r\frac{d\theta}{ds} \quad \text{এবং} \quad \cos \phi = \frac{dr}{ds}$$

মনে করি, $r = f(\theta)$ বক্ররেখাটির উপর $P(r, \theta)$ এই বিন্দুটি অবস্থিত এবং মনে করা যাক উহার নিকটস্থ বক্ররেখার একটি বিন্দু $Q(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$. Q ও P যোগ করা হল এবং মনে করি, P বিন্দু থেকে OQ রেখার উপর PM লম্ব টানা হয়েছে।

অতএব, এখন $\angle POM = \delta\theta$ ও $PM = r \sin \delta\theta$ এবং $OM = r \cos \delta\theta$.

এখন মনে করি, OP ঘূর্ণায়মান বাহুটির সহিত P বিন্দুতে অঙ্কিত PN স্পর্শকটি ϕ কোণ সৃষ্টি করে। $\therefore$ $\angle OPN = \psi$. আবার সমকোণী ত্রিভুজ PQM থেকে পাওয়া যায় যে,

$$\tan PQM = \frac{PM}{MQ} = \frac{r \sin \delta\theta}{OQ - OM} = \frac{r \sin \delta\theta}{r + \delta r - r \cos \delta\theta}$$

$$= \frac{r \sin \delta\theta}{r(1-\cos \delta\theta)+\delta r} = \frac{r \sin \delta\theta}{2r \sin^2 \frac{\delta\theta}{2} + \delta r}$$

$$= \frac{r \sin \delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} r\, \delta\theta \left(\sin \frac{\delta\theta}{2} \Big/ \frac{\delta\theta}{2}\right)^2 + \frac{\delta r}{\delta\theta}}$$

মনে করি, $Q \to P$. $\therefore \triangle\theta \to 0$. এইরূপ সীমা অবস্থায় PQ রেখাটি P বিন্দুতে একটি স্পর্শকের আকার ধারণ করে এবং তখন $\angle PQM \to \angle OPN = \phi$

$$\therefore \tan \phi = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{r \frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta}}{\frac{1}{2} r\, \delta\theta \left(\frac{\sin \delta\theta/2}{\delta\theta/2}\right)^2 + \frac{\delta r}{\partial\theta}}.$$

$$= \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = r\frac{d\theta}{dr}.$$

$$\left[\because \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta} = 1 = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\sin \frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}\right]$$

এখন মনে করি বক্ররেখার উপর যে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু R থেকে PR এই চাপ দৈর্ঘ্য s, এবং চাপ $PQ = \delta s$ $\therefore RQ = s + \delta s$, যেখানে s হবে, θ অর্থাৎ r এর একটি ফাংশন।

$$\therefore \sin PQM = \frac{PM}{PQ} = r\frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{PQ}$$

এবার ধরা যাক, $Q \to P$ $\therefore \delta\theta \to 0$ $\delta s \to 0$ এবং

$$\frac{\delta s}{PQ}\left[= \frac{\text{চাপ } PQ}{\text{জ্যা } PQ}\right] \to 1 \quad \therefore \sin \phi = \lim_{\delta s \to 0} \frac{r\delta\theta}{\delta s} = \frac{r d\theta}{ds}$$

আবার, $\cos PQM = \dfrac{QM}{PQ} = \dfrac{OQ - ON}{PQ}$

$$= \frac{(r+\delta r) - r\cos \delta\theta}{PQ} = \frac{r(1-\cos \delta\theta)+\delta r}{PQ}$$

$$= \frac{r \cdot 2\sin^2 \delta\theta/2 + \delta r}{PQ} = \frac{1}{2} r\, \delta\theta \left\{\frac{\sin \frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}\right\}^2 \frac{\delta\theta}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{PQ}$$

$$+ \frac{\delta r}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{PQ}.$$

এখন $Q \to P$ ধরলে আগের মতই পাওয়া যায়, $\cos\phi = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta r}{\delta s} = \frac{dr}{ds}$.

আবার, ত্রিভুজ OPN থেকে পাওয়া যায়,

$$\angle PNX = \angle PON + \angle OPN.$$

বা, $\psi = \theta + \phi$ ... (1)

এবং যেহেতু $\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}$ ও $\cos\phi = \frac{dr}{ds}$

$$\therefore \quad \text{Sin}^2\phi + \text{Cos}^2\phi = r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1$$

10.15 ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কে (polar coordinates) চাপ দৈর্ঘ্যের অন্তরকলজ

পূর্বের অনুচ্ছেদের (10.14) চিত্রটি থেকে পাওয়া যায়

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$
$$= (r \sin \partial\theta)^2 + (r + \delta r - r\cos\delta\theta)^2$$
$$= (r \sin \partial\theta)^2 + \left(2r \sin^2 \frac{\partial\theta}{2} + \partial r\right)^2$$

উভয় পক্ষকে $(\partial\theta)^2$ দ্বারা ভাগ দিলে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{PQ}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)^2 = r^2\left(\frac{\sin\partial\theta}{\partial\theta}\right)^2 + \left[\frac{r}{2}\partial\theta\left(\frac{\sin\frac{\partial\theta}{2}}{\frac{\partial\theta}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

যখন, $Q \to P$ ও $\delta\theta \to 0$ তখন,

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad \text{... (i)}$$

বা $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$ ... (ii)

উভয়পক্ষকে $\frac{d\theta}{dr}$ দ্বারা গুণ করার পর পাওয়া যায়

$$\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

বা, $\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$ ... (iii)

আবার (i) নং সমীকরণকে $(d\theta)^2$ দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়,

$$ds^2 = r^2(d\theta)^2 + dr^2 \quad \text{... (iv)}$$

এখন (ii) ও (iii) নং সমীকরণ দুটিকে যথাক্রমে $d\theta$ এবং dr দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়,

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \quad \ldots \quad (v)$$

$$\text{এবং} \quad ds=\sqrt{1+\left(\frac{rd\theta}{dr}\right)^2}\,dr \quad \ldots \quad (vi)$$

উদাহরণ ঃ $r=ae^{\theta \cot \alpha}$ এই বক্ররেখাটির জন্য $\frac{ds}{d\theta}$ এর মান বাহির কর।

উত্তর ঃ এখানে আমাদের দেওয়া আছে, $r=ae^{\theta \cot \alpha}$

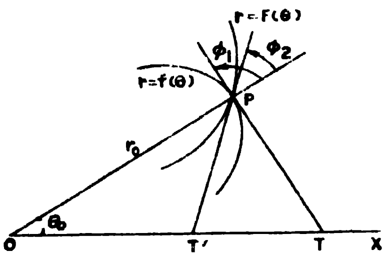
$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta}=a\cot\alpha\, e^{\theta \cot \alpha}=r\cot\alpha$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{r^2+r^2\cot^2\alpha}=\sqrt{r^2(1+\cot^2\alpha)}$$

$$=r\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha}=r\operatorname{cosec}\alpha$$

10.16 দুইটি ধ্রুবীয় (polar) বক্ররেখার ছেদ কোণ নির্ণয়

ধরা যাক, দুইটি বক্ররেখা $r=f(\theta)$, $r=F(\theta)$, P বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং এখন ঐ P বিন্দুতে বক্ররেখা দুটির জন্য যথাক্রমে PT এবং PT' স্পর্শক দুটি টানা হল, এবং মনে করি, $\angle OPT=\phi_1$ ও $\angle OPT'=\phi_2$. এইভাবে ধরা যাক $r=f(\theta)$ এবং $r=F(\theta)$ বক্ররেখাদ্বয় পরস্পর $P(r_0, \theta_0)$ বিন্দুতে α কোণে অবস্থিত। তাহলে



আমরা পাই, $\alpha=\phi_1-\phi_2$

$$\therefore \quad \tan\alpha=\frac{\tan\phi_1-\tan\phi_2}{1+\tan\phi_1\tan\phi_2}$$

আবার, এখানে $\tan\phi_1=\frac{r_0}{f'(\theta_0)}$,

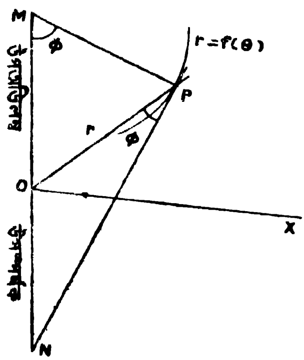
এবং $\tan\phi_2 = \dfrac{r_0}{F'(\theta_0)}$

$$\text{অতএব,}\quad \tan\alpha = \frac{\dfrac{r_0}{f'(\theta_0)} - \dfrac{r_0}{F'(\theta_0)}}{1 + \dfrac{r_0}{f'(\theta_0)}\cdot\dfrac{r_0}{F'(\theta_0)}}$$

$$\text{বা}\quad \tan\alpha = \frac{r_0F'(\theta_0) - r_0 f'(\theta_0)}{f'(\theta_0)\,F'(\theta_0) - (r_0)^2}$$

10.16 ধ্রুবীয় (Polar) উপস্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব

সংজ্ঞা : যদি স্থিরবিন্দু O এর মধ্য দিয়া এমন একটি সরলরেখা টানা যায়, যাতে ঐ সরলরেখাটি OP এই দূরকের (radious vector) সহিত লম্ব অবস্থায় থাকে এবং মনে করি, $r = f(\theta)$ বক্ররেখার P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্ব যথাক্রমে ঐ সরলরেখাকে N ও M বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে MON রেখাটির ON অংশটুকুকে ধ্রুবীয় উপস্পর্শক এবং OM অংশটুকুকে ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব বলা হয়।



এখন মনে করি, $r = f(\theta)$ বক্ররেখার r বিন্দুতে যথাক্রমে PN একটি স্পর্শক ও PM অভিলম্বটি টানা হয়েছে। মনে করা যাক স্পর্শক ও অভিলম্ব দুটি দূরকের সহিত লম্ব MON রেখাটির উপর যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন সংজ্ঞানুযায়ী বলা যায় যে, ON = ধ্রুবীয় উপস্পর্শক এবং OM = ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব।

আবার মনে করি, $\angle OPN = \phi \quad \therefore\ ON = OP\tan\phi$

$$ON = r\cdot\frac{rd\theta}{dr} = r^2\frac{d\theta}{dr} \quad \left[\because\ \tan\phi = \frac{rd\theta}{dr}\right]$$

সুতরাং আমরা এখন লিখিতে পারি যে, ধ্রুবীয় উপস্পর্শক $= \dfrac{r^2 d\theta}{dr}$.

আবার চিত্রটি থেকে দেখা যায় যে,

$$OM = OP \tan OPM = r \cot \phi$$

$$= r \frac{dr}{r d\theta}$$

$$\therefore \quad \text{ধ্রুবীয় উপ-অভিলম্ব} = \frac{dr}{d\theta}.$$

অনুসিদ্ধান্ত (i) কোন কোন সময় ধ্রুবীয় উপস্পর্শক ও ধ্রুবীয় উপাভিলম্বের সমীকরণটিকে u এবং θ এর সাহায্যে প্রকাশ করা সুবিধাজনক হয়। যেমন ধরা যাক,

$$u = \frac{1}{r}$$

$$\text{অতএব,} \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \quad -\frac{d\theta}{du} = \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

আবার যেহেতু আমরা দেখেছি যে ধ্রুবীয় উপস্পর্শক $= \dfrac{r^2 d\theta}{dr}$,

$$\therefore \quad \text{ধ্রুবীয় উপস্পর্শক} = -\frac{d\theta}{du}; \quad \text{যখন } u = \frac{1}{r}.$$

(ii) উপরের চিত্রটি থেকে পাওয়া যায়,

$$OM = OP \tan OPM = OP \tan (\angle NPM - \angle NPO)$$

$$= OP \tan (90^\circ - \phi)$$

$$= OP \cot \phi \qquad (\because \angle NPM = 90^\circ$$

$$= r \cot \phi \qquad \text{এবং } \angle NPO = \phi)$$

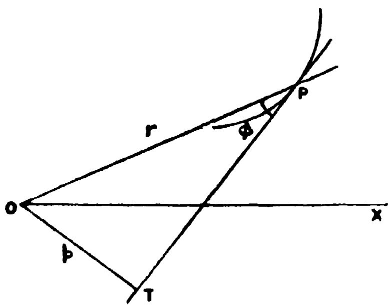
$$= r \cdot \frac{dr}{r d\theta}$$

$$= \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \text{ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব} = \frac{dr}{d\theta}.$$

10.18 মূলবিন্দু বা ধ্রুব (Pole) থেকে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য

(i) এখানে মনে করি PT স্পর্শকটির উপর মূলবিন্দু থেকে লম্বটির দৈর্ঘ্য $= p$



সুতরাং এখন সমকোণী ত্রিভুজ OPT থেকে লেখা যেতে পারে যে,

$$OT = OP \sin\phi$$

বা $p = r\sin\phi$

$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2\phi} = \frac{\operatorname{cosec}^2\phi}{r^2} = \frac{1+\cot^2\phi}{r^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\right\}^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \quad \cdots \quad (A)$$

(ii) এখন আমরা লম্বদৈর্ঘ্যটিকে θ এবং u এর সাহায্যে প্রকাশ করব।

মনে করি, $u = \frac{1}{r}$.

$$\therefore \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}.$$

বা, $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

এবার, $\frac{1}{r^2}$ এবং $\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$ এর পরিবর্তে u^2 ও $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$ বসালে সমীকরণ (A) থেকে পাওয়া যাবে,

$$\frac{1}{r^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \quad \cdots \quad (B)$$

10.19 (p, r) আকারে বক্ররেখার সমীকরণ বা বক্ররেখার পাদ (Pedal) সমীকরণ

সংজ্ঞা : কোন বক্ররেখার (p, r) সমীকরণ বলতে বুঝায় যে, ঐ বক্ররেখাটির P চলবিন্দুতে স্পর্শকের উপর মুল বিন্দু O থেকে অঙ্কিত লম্বের (p) সহিত OP বাহুটির দৈর্ঘ্যের (r) সম্পর্ক।

(A) যখন কার্টেসীয় সমীকরণটি দেওয়া আছে, তখন মূলবিন্দু O সাপেক্ষে পাদ সমীকরণ নির্ণয় ঃ

মনে করি কোন একটি বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y)=0$ ... (i)

এখানে মূলবিন্দু সাপেক্ষে পাদ সমীকরণটি নির্ণয় করতে হবে।

এখন আমরা জানি (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ—

$$(X-x)f_x+(Y-y)f_y=0$$

আবার ধরা যাক যে, মূলবিন্দুটি থেকে স্পর্শকের উপর লম্ব-দূরত্ব $=p$

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির নিয়ম অনুসারে $p^2=\dfrac{(xf_x+yf_y)^2}{f_x^2+f_y^2}$ ... (ii)

এবং $r^2=x^2+y^2$ ... (iii)

এখন (i), (ii) ও (iii) থেকে x এবং y কে অপনয়ন করে নির্ণেয় সমীকরণটি বাহির করা যাবে।

(B) যখন ধ্রুবীয় (polar) সমীকরণটি দেওয়া থাকে তখন সেই অবস্থায় পাদ সমীকরণ নির্ণয়—

মনে করি কোন একটি বক্ররেখার সমীকরণ দেওয়া আছে, $f(r, \theta)=0$;

তাহলে $\tan\phi=\dfrac{rd\theta}{dr}$ এবং $p=r\sin\phi$

এখন $f(r, \theta)=0$, $\tan\phi=\dfrac{rd\theta}{dr}$ ও $p=r\sin\phi$ থেকে θ এবং ϕ এর অপনয়ন করা হলে আমরা নির্ণেয় পাদ-সমীকরণ পাব।

উদাহরণ 1. $r^2=a^2\cos 2\theta$ এই বক্ররেখাটির পাদ সমীকরণটি বাহির কর।

উত্তর ঃ বক্ররেখাটির ধ্রুবীয় সমীকরণটিতে দেওয়া আছে,

$$r^2=a^2\cos 2\theta \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\therefore\ 2r\frac{dr}{d\theta}=-2a^2\sin 2\theta$$

বা, $\dfrac{rd\theta}{dr}=-\dfrac{r^2}{a^2\sin 2\theta}=-\dfrac{a^2\cos 2\theta}{a^2\sin 2\theta}$.

বা, $\tan\phi=-\cot 2\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+2\theta\right)$

বা, $\phi=\dfrac{\pi}{2}+2\theta$

আবার, $p=r\sin\phi=r\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)=r\cos 2\theta$ ... (ii)

এখন (i) এবং (ii) এর মধ্যে $\cos 2\theta$ কে অপনয়ন করলে পাওয়া যায়,

$$p=r\cdot\frac{r^2}{a^2} \quad \text{বা,} \quad r^3=pa^2,$$

উহাই নির্ণেয় পদ-সমীকরণ।

উদাহরণ 2. $r=e^\theta$ এই বক্ররেখাটির জন্য প্রমাণ কর যে ধ্রুবীয় (polar) উপস্পর্শক = ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব।

উত্তর : এখানে আমাদের দেওয়া আছে, $r=e^\theta$

অতএব উভয়দিকের লগারিদমের সাহায্যে পাওয়া যায়

$\log r=\theta$, বা $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=1$

$$\therefore \quad \frac{dr}{d\theta}=r$$

$$\text{বা,} \quad r^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{dr}{d\theta}.$$

$$\text{বা,} \quad \frac{r^2 d\theta}{dr}=\frac{dr}{d\theta} \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

আমরা যেহেতু জানি যে, ধ্রুবীয় উপস্পর্শক $=\frac{r^2 d\theta}{dr}$ এবং ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব $=\frac{dr}{d\theta}$. সুতরাং (i) নং সমীকরণ থেকে স্পষ্টতই দেখা যায় যে ধ্রুবীয় উপস্পর্শক = ধ্রুবীয় উপাভিলম্ব (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3. $r=a\sin 2\theta$ এবং $r=a\cos 2\theta$ এই বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদ কোনটি বাহির কর।

উত্তর : প্রথম বক্ররেখাটি থেকে পাওয়া যায়

$r=a\sin 2\theta$ এবং এখানে লগারিদমিক অন্তরকলণের ফলে দাঁড়ায়,

$$\frac{dr}{rd\theta}=\frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}.$$

$$\therefore \quad \frac{rd\theta}{dr}=\frac{\sin 2\theta}{2\cos 2\theta}$$

$$\text{বা,} \quad \tan\phi=\frac{r\,d\theta}{dr}=\frac{1}{2}\tan 2\theta$$

আবার, দ্বিতীয় বক্ররেখাটির থেকে পাওয়া যায়,

$$r = a\cos 2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

বা, $$\frac{r\,d\theta}{dr} = -\frac{1}{2}\cot 2\theta$$

বা, $$\tan\phi_1 = -\frac{1}{2}\cot 2\theta$$

বক্ররেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুটির জন্য পাই,

$$r = a\sin 2\theta = a\cos 2\theta \qquad \therefore \quad \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 1$$

বা $\tan 2\theta = 1$ $\quad\therefore\quad \tan\phi = \frac{1}{2}$ এবং $\tan\phi_1 = -\frac{1}{2}$

$(\because \quad \tan 2\theta = 1, \cot 2\theta = 1)$

অতএব, $$\tan(\phi - \phi_1) = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদ কোণটি

$$\phi - \phi_1 = \tan^{-1}\frac{4}{3}.$$

উদাহরণ 4. $r = a\theta$ এই বক্ররেখাটির জন্য $\frac{ds}{dr}$ এর মান বাহির কর।

উত্তর : যেহেতু আমরা জানি যে

$$\frac{dr}{ds} = \cos\phi \qquad \therefore \quad \frac{ds}{dr} = \sec\phi.$$

বা $$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \tan^2\phi}$$

এখন বক্ররেখাটির সমীকরণটিতে আছে,

$$r = a\theta \qquad \text{বা,} \quad \frac{dr}{d\theta} = a$$

$$\therefore \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{a} \qquad \text{বা,} \quad \tan\phi = \frac{r}{a}\left[\because \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \tan\phi\right]$$

সুতরাং $$\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \tan^2\phi}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}.$$

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর $r^n = a^n \cos n\theta$ এবং $r^n = b^n \sin n\theta$ এই কুণ্ডলিকৃত (spiral) বক্ররেখাদুটি লম্বভাবে ছেদ করে।

উত্তর ঃ বক্ররেখাদ্বয়ের সমীকরণ দুইটি যথাক্রমে

$$r^n = a^n \cos n\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$r^n = b^n \sin n\theta \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এখন (i) নং সমীকরণটির উভয়দিকের লগারিদমের সাহায্যে পাওয়া যায়

$$n \log r = n \log a + \log \cos n\theta$$

উভয়পক্ষকে θর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাই,

$$\frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{-n \sin n\theta}{\cos n\theta}.$$

বা, $$r\frac{d\theta}{dr} = -\cot n\theta = \tan \phi \text{ (ধরি)}$$

আবার একই উপায়ে (ii) নং সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়,

$$n \log r = n \log b + \log \sin n\theta$$

$$\therefore \quad \frac{n}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{n \cos n\theta}{\sin n\theta}$$

বা, $$r\frac{d\theta}{dr} = \tan n\theta = \tan \phi' \text{ (ধরি)}$$

$$\therefore \quad \tan \phi \times \tan \phi' = -\cot n\theta \times \frac{1}{\cot n\theta} = -1$$

অতএব প্রমাণিত হল যে, বক্ররেখা দুইটি লম্বভাবে ছেদ করে।

উদাহরণ 6. $r^m = a^m \cos m\theta$ এই বক্ররেখাটির জন্য প্রমাণ কর যে,

$$\frac{ds}{d\theta} = a(\sec m\theta)^{\frac{m-1}{m}}$$

উত্তর ঃ বক্ররেখাটির সমীকরণে আছে,

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

$$\therefore \quad m \log r = m \log a + \log \cos m\theta.$$

উভয়দিকে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{m}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} = -\frac{m \sin m\theta}{\cos m\theta}.$$

বা, $$\frac{dr}{d\theta} = -r \tan m\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}=\sqrt{(r^2+r^2\tan^2 m\theta)}$$

$$=r\sec m\theta=a\,(\cos m\theta)^{\frac{1}{m}}\sec m\theta$$

$$=a\sec^{\frac{m-1}{m}} m\theta.$$

বিবিধ অনুশীলনী 10

1. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ উপবৃত্তের $t=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে দেখাও যে $\frac{dy}{dx}$ এর মান $-\frac{b}{a}$; এখন ঐ বিন্দুতে প্রমাণ কর স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$bx+ay-ab\sqrt{2}=0$$

এবং $(ax-by)\sqrt{2}-a^2+b^2=0.$

$t=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে দেখাও উপস্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\frac{a}{\sqrt{2}}$, উপাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}$, স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}$

এবং অভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}$.

2. দেখাও যে $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ বক্ররেখার (a,b) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2.$$

3. প্রমান কর $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক।

4. যদি $p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ রেখা $\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}=1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর

$$p^{\frac{m}{m-1}}=(a\cos\alpha)^{\frac{m}{m-1}}+(b\sin\alpha)^{\frac{m}{m-1}}$$

[সঙ্কেত : (x, y) বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শক

$$(X-x)\frac{mx^{m-1}}{a^m} + (Y-y)\frac{my^{m-1}}{b^m} = 0$$

অথবা, $Xx^{m-1}/a^m + Yy^{m-1}/b^m = 1$ ……………(i)

এখন যদি $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ ……………………(ii)

রেখা বক্ররেখাকে স্পর্শ করে তাহলে (i) এবং (ii) অভিন্ন হবে।

সুতরাং $\frac{x^{m-1}}{a^m} \Big/ \cos \alpha = \frac{y^{m-1}}{b^m} \Big/ \sin \alpha = \frac{1}{p}$

$\therefore \quad \frac{a \cos \alpha}{p} = \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1}$ এবং $\frac{b \sin \alpha}{p} = \left(\frac{y}{b}\right)^{m-1}$

$\therefore \quad \left(\frac{a \cos \alpha}{p}\right)^{\frac{m}{m-1}} + \left(\frac{b \sin \alpha}{p}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$, ইত্যাদি]

5. প্রমাণ কর নিম্নলিখিত বক্ররেখা দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করবে, যদি $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}$ সিদ্ধ হয় :—

$$ax^2 + by^2 = 1$$

এবং $a_1 x^2 + b_1 y^2 = 1$

6. যদি $p = x \cos \theta + y \sin \theta$ রেখাটি $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ বক্র-রেখাকে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর

$$p^n = (a \cos \theta)^n + (b \sin \theta)^n.$$

7. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব যদি x অক্ষরেখার সহিত θ সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব যদি p হয়, তবে দেখাও যে,

$$\cos \theta = \frac{px_1}{a^2}, \quad \sin \theta = \frac{py_1}{b^2}.$$

8. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ররেখার একটি অভিলম্ব যদি x-অক্ষরেখার সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে ঐ অভিলম্বের সমীকরণ নিম্নরূপ

$$y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$$

9. দেখাও যে $y = c \cosh (x/c)$ বক্ররেখার কোন বিন্দুর কোটির পাদ-বিন্দু থেকে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব দূরত্ব একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ কর ঐ বক্ররেখার ক্ষেত্রে যে কোন বিন্দুতে অভিলম্বের দৈর্ঘ্য y^2/c এর সমান।

10. প্রমাণ কর $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ বক্ররেখার পাদ-সমীকরণ নিম্নরূপ

$$r^2+3p^2=a^2.$$

11. প্রমাণ কর $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পাদ-সমীকরণ নিম্নরূপ

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{r^2}{a^2b^2}.$$

12. যদি $p=x\cos\alpha+y\sin\alpha$ রেখাটি $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে $16\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha=p^2$.

প্রমাণ কর $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ এবং $x^2+y^2=16$ দুইটি বক্ররেখার সমান ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে উপস্পর্শক দুইটি সমান।

13. প্রমাণ কর $r^n=a^n\cos n\theta$ এবং $r^n=b^n\sin n\theta$ বক্ররেখা দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

14. প্রমাণ কর $x=a\cos^3\phi,\ y=b\sin^3\phi$ বক্ররেখার ϕ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নিম্নরূপ

$$x\sin\phi+y\cos\phi=a\sin\phi\cos\phi$$

এখন দেখাও যে ঐ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের মধ্যে ছেদিত অংশের দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক।

15. $r=a(1-\cos\theta)$ বক্ররেখার পাদ সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উত্তর : $2ap^2=r^3$]

16. প্রমাণ কর $f(x, y, z)=0$ তলের (x_1, y_1, z_1) বিন্দুতে স্পর্শক-সমতলের সমীকরণ

$$\left(\frac{\partial f}{dx}\right)_{(x_1,\ y_1,\ z_1)}(x-x_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_1,\ y_1,\ z_1)}(y-y_1)$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_1,\ y_1,\ z_1)}(z-z_1)=0$$

এবং ঐ তলের অভিলম্ব রেখার সমীকরণ

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_1,\, y_1,\, z_1)}}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_1,\, y_1,\, z_1)}}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_1,\, y_1,\, z_1)}}$$

17. মূলবিন্দু থেকে $y=\sin x$ বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের স্পর্শবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [উত্তর : $x^2y^2=x^2-y^2$]

18. $x^2(y+1)=y^2(x-4)$ বক্ররেখার যে স্পর্শকগুলি $y=x$ সরলরেখার সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [উত্তর : $y=x\pm 4$]

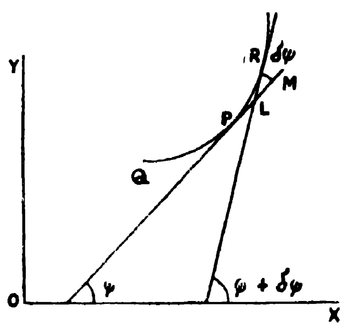
একাদশ অধ্যায়

বক্রতা

11.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

বক্ররেখার আকার স্পষ্টভাবে বুঝবার জন্য বা **বক্ররেখাদের বক্রতা অনুসারে** তাদের পৃথক করতে হলে বক্রতা মাপা প্রয়োজন। তাই এই অধ্যায়ের আলোচ্য বিষয় 'বক্রতা'। প্রথমে বক্রতার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দেওয়া হবে।

মনে করা যাক Γ এই বক্ররেখাটির উপর যে কোন দুইটি কাছাকাছি অবস্থিত বিন্দু P ও R আছে। এখন মনে করি, P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকটি X অক্ষের সহিত ψ কোণ সৃষ্টি করে এবং R বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকটি X অক্ষের সহিত $\psi+\delta\psi$ কোণে অবস্থিত। অতএব $\angle RLM = \delta\psi$.



আবার মনে করি Γ বক্ররেখার উপর যে কোন একটি স্থির বিন্দু Q থেকে P এর চাপ দূরত্ব $QP = s$ সুতরাং $QR = s + \delta s$। এখন $PR = \delta s$ এই চাপ দৈর্ঘ্যটির উপর দিয়া ঘূর্ণায়মান স্পর্শকটি যে $\delta\psi$ কোণ সৃষ্টি করে তাকে PR এই চাপ দৈর্ঘ্যটির **সামগ্রিক** বা **মুল বক্রতা** বলে, ও $\dfrac{\delta\psi}{\delta s}$ কে এখানে বলা হবে PR চাপটির দৈর্ঘ্য বক্রতার **গড় বক্রতা**। আবার P বিন্দুতে বক্রতার সংজ্ঞা, সীমার ধারণার সাহায্যে দেখান যায় যে, যখন $Q \to P$ তখন $\delta s \to 0$, এই সীমাস্থ অবস্থায় $\dfrac{\delta\psi}{\delta s}$ এই অনুপাতটির সীমাস্থ মানটিকেই বলা হবে P বিন্দুতে বক্রতা (k)।

$$\therefore \quad P \text{ বিন্দুতে } \quad \text{বক্রতা} = k = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{d\psi}{ds}$$

অতএব চাপদৈর্ঘ্যের সাপেক্ষে নতি পরিবর্তনের হারকে P বিন্দুতে বক্রতা বলা হয়।

এখন উপরে বর্ণিত বক্রতার সংজ্ঞাগুলিকে নীচে লিপিবদ্ধ করা হল ঃ

সংজ্ঞা—(1) PR বক্ররেখাটির সম্পূর্ণ বক্রতা বলতে $\delta\psi$ কোণটিকেই বুঝায়।

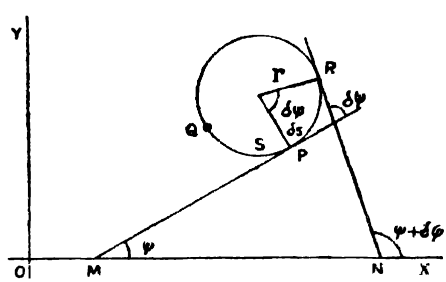
(2) $\dfrac{\delta\psi}{\delta s}$ এই অনুপাতটিকে বলা হয় PR চাপ দৈর্ঘ্যের গড় বক্রতা।

(3) P বিন্দুতে বক্ররেখাটির বক্রতা বলতে বুঝায় যে,

$$\lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{\partial\psi}{\partial s}.$$

11.02 বৃত্তের বক্রতা ঃ

এখানে দেখান হবে যে একটি বৃত্তের উপর যে কোন বিন্দুতে বক্রতা সমান এবং উহা ব্যাসার্ধের অন্যোন্যক (reciprocal)। এখানে মনে করি, C প্রদত্ত বৃত্তটির কেন্দ্র এবং $r =$ ব্যাসার্ধ ; P ও R বৃত্তটির উপর যে কোন দুটি নিকটতম বিন্দু। এখন P ও R বিন্দুদুটির উপর দিয়া অঙ্কিত স্পর্শক দুটি মনে করা যাক X অক্ষের সহিত যথাক্রমে ψ এবং $\psi + \delta\psi$ কোণে অবস্থিত। আবার ধরি, PM এবং RN স্পর্শক-দ্বয়ের উপর কেন্দ্র C থেকে CP এবং CR এই দুইটি লম্ব টানা হয়েছে। যেহেতু স্পর্শকদ্বয় PM এবং RN পরস্পর $\delta\psi$ কোণে অবস্থিত, সেহেতু $\angle PCR$ এই কোণটিও $\delta\psi$ হবে। এখন যদি বৃত্তটির উপর Q যে কোন একটি বিন্দু ধরা যায় তবে মনে করি $QP = s$ এবং $QR = s + \delta s$. $\therefore$ এখন $PR = \delta s$. আবার, বৃত্তীয় পরিমাপ থেকে আমাদের জানা আছে যে,



$$\angle PCR = \delta\psi = \frac{\text{চাপ } PR}{\text{ব্যাসার্ধ } CR} = \frac{\delta s}{r}$$

$$\therefore \quad \delta\psi = \frac{\delta s}{r} \quad \text{বা,} \quad \frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{1}{r}$$

যখন $R \to P,\ \delta s \to 0$

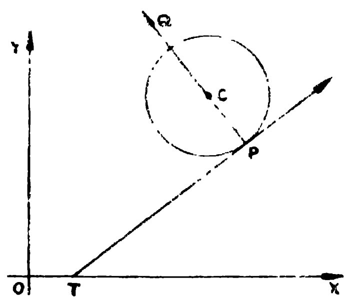
$$\therefore \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r}.$$

অতএব প্রমাণ করা গেল যে বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে বক্রতা বলতে ব্যাসার্ধের অন্যোন্যকটিকেই বুঝায়। আবার, এখান সহজেই দেখা যায় যে, যখন ব্যাসার্ধ (r) বৃদ্ধি পায় তখন একই সংগে বক্রতা $\left(\frac{1}{r}\right)$ হ্রাস পায়।

11 02 বক্রতার ব্যাসার্ধ, বক্রতাকেন্দ্র, বক্রতাবৃত্ত ও বক্রতা জ্যা :

কোন বক্ররেখার যে কোন একটি বিন্দুতে বক্রতার অন্যোন্যককে $\left(\text{অর্থাৎ } \frac{1}{k}\right)$ সেই বিন্দুতে বক্রতার ব্যাসার্ধ বলা হয় এবং ইহাকে ρ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $\rho = \dfrac{1}{\frac{d\psi}{ds}} = \dfrac{ds}{d\psi}.$



যদি P বিন্দুটি থেকে অভিলম্বের ধনাত্মক PC এই দৈর্ঘ্যটি - ρ ধরা যায়, তবে C কে বলা হয় P বিন্দুতে বক্রতাকেন্দ্র, এবং বৃত্তটিকে যাহার কেন্দ্র C, ব্যাসার্ধ CP তাহাকে বলা হয় P বিন্দুতে বক্রতাবৃত্ত। আবার P বিন্দুগামী এবং P বিন্দুর বক্রতা বৃত্তের যে কোন জ্যাকে ঐ বিন্দুর বক্রতা জ্যা বলা হয়।

11.04 বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় :

(I) কার্টেসীয় স্পষ্ট সমীকরণ (Cartesian Explicit equation) দ্বারা যখন বক্ররেখাটি প্রকাশিত :

মনে করি বক্ররেখার সমীকরণ $y = f(x)$; এক্ষেত্রে আমরা জানি $y_1 = \frac{dy}{dx} = \tan\psi$; আবার উভয় দিকে s এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাওয়া যায়,

$$\frac{dy_1}{ds} = \sec^2\psi \frac{d\psi}{ds}$$

বা, $\dfrac{dy_1}{dx} \cdot \dfrac{dx}{ds} = \sec^2 \psi \dfrac{d\psi}{ds}$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} \cos \psi = \sec^2 \psi \dfrac{d\psi}{ds}$; $\left[\because \quad \dfrac{dx}{ds} = \cos \psi \right]$

বা, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sec^3 \psi \dfrac{d\psi}{ds}$

বা, $\dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{d^2y}{dx^2} \Big/ \sec^3 \psi$

বা, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d^2y}{dx^2} \Big/ \sec^3 \psi \left[\because \quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d\psi}{ds} \right]$

বা, $\rho = \dfrac{\sec^3 \psi}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} = \dfrac{(1 + \tan^2 \psi)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

$= \dfrac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$, $\left[\because \quad \tan \psi = \dfrac{dy}{dx}\right.$; এখানে $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 0 \right]$

$\therefore \quad \rho = \dfrac{[1 + y_1{}^2]^{\frac{3}{2}}}{y_2}, \; y_2 \neq 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (A)$

চিহ্নের নিয়ম :

উপরোক্ত সূত্রটির ক্ষেত্রে লব অংশটি অর্থাৎ $[1 + y_1{}^2]^{\frac{3}{2}}$ যদি ধনাত্মক মনে করা যায় তবে, y_2 অর্থাৎ হর অংশটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে ρ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হবে।

আবার যখন স্পর্শকটি y অক্ষের সহিত সমান্তরাল হয় তখন উপরোক্ত সূত্রটির ব্যতিক্রম ঘটে এবং তখন ঐ ক্ষেত্রে বক্ররেখাটির সমীকরণ ধরা হয় $x = \phi(y)$.

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{dx}{dy} = \cot \psi$

বা, $\dfrac{dx_1}{ds} = -\operatorname{cosec}^2 \psi \dfrac{d\psi}{ds}$

বা, $\dfrac{dx_1}{dy} \cdot \dfrac{dy}{ds} = -\operatorname{cosec}^2 \psi \dfrac{d\psi}{ds}$

বা, $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\operatorname{cosec}^3\psi\,\dfrac{d\psi}{ds}$; $\left[\because\ \dfrac{dy}{ds} = \sin\psi\right]$

বা, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{d^2x}{dy^2}\Big/(-\operatorname{cosec}^3\psi)$; $\left[\because\ \dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\right]$

বা, $$\rho = -\frac{\operatorname{cosec}^3\psi}{\dfrac{d^2x}{dy^2}} = \frac{-[1+\cot^2\psi]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

$$= \frac{-\left[1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

$$\therefore\quad \rho = -\frac{[1+x_1^2]^{\frac{3}{2}}}{x_2}\ ;\ x_2 \neq 0.$$

এখন বক্রতা ব্যাসার্ধের জন্য শুধুমাত্র মান (magnitude) ধরে লেখা যায়,

$$\rho = \frac{(1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{x_2},\ x_2 \neq 0$$

উদাহরণ ঃ $y = a\log\sec\dfrac{x}{a}$ এই বক্ররেখাটির যে কোন বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধটি বাহির কর।

উত্তর ঃ বক্ররেখাটির সমীকরণ দেওয়া আছে যে,

$$y = a\log\sec\frac{x}{a}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = y_1 = \tan\frac{x}{a}.$$

এবং $$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = \frac{\sec^2(x/a)}{a}$$

$$\therefore\quad \rho = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \frac{[1+\tan^2(x/a)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a}\sec^2(x/a)}$$

$$= \frac{[\sec^2(x/a)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a}\sec^2(x/a)} = a\sec(x/a).$$

(II) কার্টেসীয় অস্পষ্ট সমীকরণ (Cartesian implicit equation) দ্বারা যখন বক্ররেখাটি প্রকাশিত :

মনে করি বক্ররেখাটির সমীকরণ $f(x, y)=0$

আমরা আংশিক অন্তরকলনের সাহায্যে জানি $\dfrac{dy}{dy}=\dfrac{-f_x}{f_y}, f_y \neq 0$

$\therefore \quad f_y \dfrac{dy}{dx}+f_x=0.$ আবার এখানে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাওয়া যায়,

$$\frac{df_x}{dx}+\frac{df_x}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{df_y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df_y}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+f_y\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

বা, $f_{xx}+2f_{yx}\dfrac{dy}{dx}+f_{yy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+f_y\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

[এখানে মনে করি $f_{yx}=f_{xy}$]

বা, $f_y\dfrac{d^2y}{dx^2}=-f_{xx}-2f_{yx}\dfrac{dy}{dx}-f_{yy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

বা, $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-f_{xx}-2f_{yx}\dfrac{dy}{dx}-f_{yy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{f_y}$$

$$=\frac{-f_{xx}-2f_{yx}\left(\dfrac{-f_x}{f_y}\right)-f_{yy}\left(\dfrac{-f_x}{f_y}\right)^2}{f_y}$$

$$=\frac{-f_{xx}+2f_{yx}\dfrac{f_x}{f_y}-f_{yy}\dfrac{f_x^2}{f_y^2}}{f_y}$$

এখন $\dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর মান দুইটি (A)তে বসিয়ে এবং বক্রতা ব্যাসার্দ্ধের শুধুমাত্র মানটিকে (magnitude) ধরলে পাওয়া যায়,

$$\rho=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}=\frac{f_y\left[1+\dfrac{f_x^2}{f_y^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{f_{xx}-2f_{yx}\dfrac{f_x}{f_y}+f_{yy}\dfrac{f_x^2}{f_y^2}}$$

$$= \frac{(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}{f_{xx}f_y^2-2f_{yx}\;f_xf_y+f_{yy}f_x^2} = \frac{-(f_x^2+f_y^2)^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix}}$$

যখন $f_{xx}f_y^2-2f_{yx}f_xf_y+f_{yy}f_x^2 \neq 0.$

উদাহরণ : $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ বিন্দুতে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ এই বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

উত্তর : এখানে $f(x, y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$

$$\therefore f_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\; f_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\; f_{xx}=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}},\; f_{yy}=-\frac{1}{4y^{\frac{3}{2}}}$$

$f_{xy}=f_{yx}=0.$

$$\therefore \rho=\frac{\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{4y}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\left(\frac{1}{16x^{\frac{3}{2}}y}+\frac{1}{16y^{\frac{3}{2}}x}\right)}$$

সুতরাং $$(\rho)_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})}=-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{16}\left(\frac{2}{4^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{4}}\right)}=\frac{-32\sqrt{2}}{2.4^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

(III) যখন বক্ররেখাটি $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত :

এখানে বক্ররেখাটির সমীকরণ দেওয়া আছে $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$.

এখন $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=y'/x'$; $[\, x'\neq 0\,]$

[এখানে x', y' বলতে t এর সাপেক্ষে একবার অন্তরকলজকে বুঝায়।]

আবার, দ্বিতীয়বার অন্তরকলন করে পাওয়া যায়—

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right)=\frac{d}{dt}(y'/x')\frac{dt}{dx}=\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}$$

এখন আমরা $\dfrac{dy}{dx}$ এবং $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর মান (A)তে বসালে ρ এর মানটি সহজেই নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায়,

$$\rho = \frac{(1+y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \frac{(\,(x')^2+(y')^2\,)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''} = \frac{[\,(x')^2+(y')^2\,]^{\frac{3}{2}}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

যখন $x'y''-y'x'' \neq 0.$

উদাহরণ : $\theta=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে $x=a\cos^3\theta,\ y=a\sin^3\theta$ এই বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ বাহির কর।

সমাধান : এখানে $x'=-3a\cos^2\theta\sin\theta$;

$$x''=6a\cos\theta\sin^2\theta-3a\cos^3\theta$$

আবার $y'=3a\sin^2\theta\cos\theta$; $y''=6a\sin\theta\cos^2\theta-3a\sin^3\theta$

এখন $\theta=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুটির জন্য $x'=-3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3,\ x''=3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$;

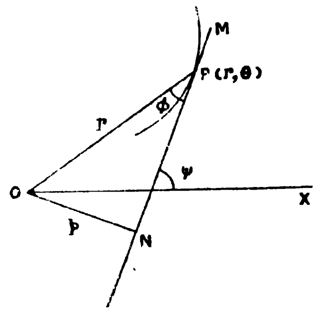
এবং $y'=3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$, ও $y''=3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

$$\therefore\quad \rho=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}=\frac{\left\{9a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6+9a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\right\}^{\frac{3}{2}}}{-3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3.\,3a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}$$

$$=\frac{\left\{18a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\right\}^{\frac{3}{2}}}{18a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6}=\frac{18^{\frac{3}{2}}a^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9}{18\,a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6}=18^{\frac{1}{2}}a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$=9^{\frac{1}{2}}\cdot2^{-1}a=\frac{3}{2}a$$

(IV) যখন বক্ররেখাটি পাদ সমীকরণ (Pedal equation) অর্থাৎ $p=f(r)$ দ্বারা প্রকাশিত :



চিত্রটি থেকে দেখা যায় যে, $p=r\sin\phi$ এবং $\psi=\theta+\phi$

এখন ইহাকে s এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\phi}{ds}$$

বা, $$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\phi}{dr}\cdot\frac{dr}{ds}$$

বা, $$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\sin\phi+\frac{d\phi}{dr}\cos\phi\,;$$

$$\left[\because\quad \sin\phi=\frac{rd\phi}{ds}\quad \text{এবং}\quad \frac{dr}{ds}=\cos\phi\right]$$

$$=\frac{1}{r}\left(\sin\phi+r\frac{d\phi}{dr}\cos\phi\right)$$

$$=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}(r\sin\theta)=\frac{1}{r}\frac{dp}{dr}\,;\quad [\because\quad p=r\sin\phi]$$

$$\therefore\quad \rho=r\frac{dr}{dp}.$$

উদাহরণ : কোন একটি উপবৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরে যদি উপবৃত্তটির পাদ সমীকরণটি পাওয়া যায় $a^2+b^2-r^2=\dfrac{a^2b^2}{p^2}$,

তবে দেখাও যে $\rho=\dfrac{a^2b^2}{p^3}$.

সমাধান ঃ এখানে আমাদের দেওয়া আছে,

$$a^2+b^2-r^2=\frac{a^2b^2}{p^2}$$

$$\therefore \quad -2r\,\frac{dr}{dp}=\frac{-2a^2b^2}{p^3}$$

বা, $\dfrac{r\,dr}{dp}=\dfrac{a^2b^2}{p^3}$; $\therefore \ \rho=\dfrac{a^2b^2}{p^3}$.

(V) যখন বক্ররেখাটি ধ্রুবীয় (Polar) সমীকরণ অর্থাৎ $r=f(\theta)$ বা $u=f(\theta)$, যেখানে $u=\frac{1}{r}$, দ্বারা প্রকাশিত :—

এক্ষেত্রে আমাদের জানা আছে যে,

$$\rho=\frac{ds}{d\psi}=\frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{d\psi}=\frac{\frac{ds}{d\theta}}{\frac{d\psi}{d\theta}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (A)$$

আবার, $\dfrac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{r^2+r_1^2}$;

এখানে মনে করি, $r_1=\dfrac{dr}{d\theta}$.

এবং, $\psi=\theta+\phi=\theta+\tan^{-1}\dfrac{rd\theta}{dr}$; যেহেতু আমরা জানি, $\tan\phi=\dfrac{rd\theta}{dr}$

$$\therefore \quad \psi=\theta+\tan^{-1}\left(\frac{r}{r_1}\right); \quad \left[\because \quad r_1=\frac{dr}{d\theta}\right]$$

এখন উভয়দিকে θ এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে এবং $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}$ কে r_2 দ্বারা চিহ্নিত করে পাওয়া যায়

$$\frac{d\psi}{d\theta}=1+\frac{1}{1+\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}\cdot\frac{r_1^2-rr_2}{r_1^2}=1+\frac{r_1^2-rr_2}{r^2+r_1^2}$$

$$=\frac{r^2+2r_1^2-rr_2}{r^2+r_1^2}$$

এখন $\dfrac{ds}{d\theta}$ এবং $\dfrac{d\psi}{d\theta}$ এর মান দুটিকে (A)-তে বসালে পাওয়া যায়,

$$\rho=\frac{\sqrt{r^2+r_1^2}}{\frac{r_1+2r_1^2-rr_2}{r^2+r_1^2}}=\frac{(r^2+2r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$$

আবার মনে করি যখন $r=\frac{1}{u}$, তখন $r_1=-\frac{u_1}{u^2}$,

এবং $r_2=\frac{2u_1^2-uu_2}{u^3}$

এখন $\rho=\frac{(r^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_1^2-rr_2}$, তাহলে উপরে প্রাপ্ত r, r_1, r_2 এর মানগুলি বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\rho=\frac{(u^2+u_1^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u+u_2)}, \text{ যখন } u^3(u+u_2)\neq 0.$$

উদাহরণ 1. $r=a(1-\cos 2\theta)$ এই বক্ররেখাটির (r, θ) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে দেওয়া আছে,

$$r=a(1-\cos 2\theta)=2a\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta.$$

আবার, $\tan\phi=r\frac{d\theta}{dr}=\frac{r}{a\sin\theta}=\frac{a(1-\cos 2\theta)}{a\sin\theta}$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \phi=\frac{\theta}{2}$$

এখন আমরা জানি, $p=r\sin\phi=r\sin\frac{\theta}{2}$.

$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=\frac{p}{r}$. অতএব সমীকরণ (1)এ $\sin\frac{\theta}{2}$ এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$r=2a\frac{p^2}{r^2}$; বা $p^3=2ap^2$

$$\therefore 3p^2\frac{dr}{dp}=4ap$$

$$\therefore \rho=r\frac{dr}{dp}=\frac{4ap}{-3r}=\frac{4a}{3r}\cdot\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a}}$$

মন্তব্য : এখানে ধ্রুবীয় সমীকরণের পাদ সমীকরণ বাহির করে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা হল। ধ্রুবীয় সমীকরণ থেকেও বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা যেতে পারে (যেমন উদাহরণ 2 দ্রষ্টব্য)।

উদাহরণ 2. (r, θ) বিন্দুতে $r = a \sec 2\theta$ এই বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$r = a \sec 2\theta, \quad \therefore \quad r_1 = 2a \sec 2\theta \tan 2\theta.$$

এবং $r_2 = 4a(\sec^3 2\theta + \sec 2\theta \tan^2 2\theta)$

এখন $\tan \phi = r\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{r}{r_1} = a \sec 2\theta \dfrac{1}{2a \sec 2\theta \cdot \tan 2\theta}$

$\therefore \quad \tan \phi = \dfrac{1}{2 \tan 2\theta}$, বা $\cot \phi = 2 \tan 2\theta$;

$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2 \phi = 1 + 4 \tan^2 2\theta.$

$\therefore \quad r^2 + r_1^2 = a^2 \sec^2 2\theta(1 + 4 \tan 2\theta) = r^2 \operatorname{cosec}^2 \phi$

আবার, $r^2 + 2r_1^2 - rr_2 = a^2 \sec^2 2\theta\,[1 + 8 \tan^2 2\theta - 4(\sec^2 2\theta + \tan^2 2\theta)]$

$$= a^2 \sec^2 2\theta(1 + 4 \tan^2 2\theta - 4 \sec^2 2\theta)$$

$$= a^2 \sec^2 2\theta(1 - 4) = -3a^2 \sec^2 2\theta = -3r^2$$

অতএব, $\rho = \dfrac{(r^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + r_1^2 - rr_2} = \dfrac{r^3 \operatorname{cosec}^3 \phi}{-3r^2} = \dfrac{-r}{3 \sin^3 \phi}$

$$= \frac{-r^4}{3(r \sin \phi)^3} = \frac{-r^4}{3p^3}.$$

(VI) স্পর্শকীয় ধ্রুবীয় (Tangential polar) সমীকরণ $p = f(\psi)$ দ্বারা যখন বক্ররেখাটি প্রকাশিত :

এখানে আমরা জানি

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{d\psi} = \frac{dp}{dr} \cdot \rho \cos \phi$$

$$= \frac{dp}{dr} \cos \phi \cdot r \frac{dr}{dp} = r \cos \phi$$

$$\therefore \quad p^2 + \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi = r^2$$

এখন p এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাই,

$$\rho = p + \frac{d^2 p}{d\psi^2}.$$

(VII) যখন x এবং y, s এর একটি ফাংশন (যাহা আমাদের জানা আছে) তখন বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় :—

এক্ষেত্রে আমরা জানি, $\dfrac{dx}{ds} = \cos\psi$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\psi \frac{d\psi}{ds} = -\sin\psi \cdot \frac{1}{\rho} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\dfrac{dy}{ds} = \sin\psi \quad \therefore \quad \dfrac{d^2y}{ds^2} = \cos\psi \dfrac{d\psi}{ds} = \cos\psi \cdot \dfrac{1}{\rho} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এবং (1) ও (2) কে বর্গ করে যোগ করার পর পাওয়া যায়

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

বিশেষ উদাহরণসমূহ :

উদাহরণ 1. যদি $s = a \log\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\psi}{2}\right) + a\dfrac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$,

প্রমাণ কর $\rho = 2a\sec^3\psi$

সমাধান :

এখানে, $s = a\log\left\{\dfrac{\cot\left(\dfrac{\psi}{2}\right)+1}{\cot\left(\dfrac{\psi}{2}\right)-1}\right\} + a\sec\psi\tan\psi$

$$= a\log\left\{\frac{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right\} + a\sec\psi\tan\psi$$

$$= a\log\left\{\frac{\left(\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\psi}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}\right\} + a\sec\psi\tan\psi$$

$$= a\log\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi} + a\sec\psi\tan\psi$$

$$= a\log(1+\sin\psi) - a\log\cos\psi + a\sec\psi\tan\psi.$$

$$\frac{ds}{d\psi}=\frac{a\cos\psi}{1+\sin\psi}+\frac{a\sin\psi}{\cos\psi}+a\sec\psi\tan^2\psi+a\sec^3\psi$$

$$=a\left(\frac{\cos\psi}{1+\sin\psi}+\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\right)+a\sec\psi(\sec^2\psi-1)+a\sec^3\psi$$

$$=a\frac{(1+\sin\psi)}{(1+\sin\psi)\cos\psi}+a\sec^3\psi-a\sec\psi+a\sec^3\psi$$

$$=a\sec\psi+2a\sec^3\psi-a\sec\psi=2a\sec^3\psi$$

$$\therefore\quad \rho=2a\sec^3\psi.$$

উদাহরণ 2. $x^4+y^4=2$ এই বক্ররেখাটির $(1, 1)$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধের মানটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে বক্ররেখাটির সমীকরণ দেওয়া আছে

$$x^4+y^4=2 \quad \text{বা} \quad x^4+y^4-2=0$$

আবার যেহেতু আমাদের জানা আছে,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}},$$

অতএব এক্ষেত্রে, $y_1=-\dfrac{4x^3}{4y^3}=-\dfrac{x^3}{y^3}$

এবং $y_2=-\left\{\dfrac{3x^2y^3-3y^2y_1x^3}{y^6}\right\}=-\left\{\dfrac{3x^2y-3y_1x^3}{y^4}\right\}$

$$=-\left\{\frac{3x^2y-3\left(\frac{-x^3}{y^3}\right)x^3}{y^4}\right\}$$

$\therefore$ $(1, 1)$ বিন্দুটির জন্য পাওয়া যায় যে,

$$y_1=-1 \quad \text{এবং} \quad y_2=6$$

সুতরাং $(1, 1)$ বিন্দুতে ρ এর মান হবে,

$$\rho=\frac{\{1+(-1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

উদাহরণ 3. $p^2=ar$ এই অধিবৃত্তটির ক্ষেত্রে দেখাও যে, বক্রতা ব্যাসার্ধ $=\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}}\right)r^{\frac{3}{2}}$.

সমাধান ঃ এখানে, যেহেতু অধিবৃত্তের পাদ-সমীকরণ দেওয়া আছে,

$$p^2 = ar, \quad \therefore \quad r = \frac{p^2}{a} \quad \text{বা} \quad \frac{dr}{dp} = \frac{2p}{a}$$

$$\therefore \quad r\frac{dr}{dp} = \frac{2p}{a} \cdot \frac{p^2}{a} = \frac{2p^3}{a^2} = \frac{2(ar)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \quad [\because \quad p^2 = ar]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\, r^{\frac{3}{2}}$$

উদাহরণ 4. $s = a \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$ এই বক্ররেখাটির (s, ψ) বিন্দুটিতে বক্রতা ব্যাসার্ধটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ এখানে $s = a \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$

$$\therefore \quad \frac{ds}{d\psi} = a \left\{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)}\right\} \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \Big/ \left[\sin\left(\frac{4}{\pi} + \frac{1}{2}\psi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} = a \sec \psi.$$

11.05 মূল বিন্দুতে বক্রতা (curvature at origin) নির্ণয় :—

(A) প্রতিস্থাপন প্রণালী ঃ 11·04নং অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে বক্রতা ব্যাসার্ধ $\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$ । এখন যদি আমাদের মূল বিন্দুতে অর্থাৎ (0, 0) বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধটির মান নির্ণয় করতে বলা হয় তখন আমরা সাধারণভাবে বক্রতার উপরোক্ত সূত্রটিতেই $x = 0$, $y = 0$ বসিয়ে তা নির্ণয় করতে পারব। কিন্তু এক্ষেত্রে একটা কথা আমাদের মনে রাখতে হবে যে, এই প্রতিস্থাপন পদ্ধতিটি সমস্ত বক্ররেখাটির উপর প্রয়োগ করা সম্ভব নয় বা কোন কোন ক্ষেত্রে সম্ভব হলেও তা জটিলরূপে দেখা দিতে পারে, সেইজন্য এই পদ্ধতিটি মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করার ক্ষেত্রে খুব নির্ভরযোগ্য নয়।

(B) বিস্তৃতি প্রণালী : যে সব ক্ষেত্রে উপরের পদ্ধতিটির সাহায্যে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা দুরূহ হবে, সেই সব ক্ষেত্রে $(y_1)_0$ এবং $(y_2)_0$ এর মান দুইটি $y = f(x)$ বক্ররেখাটির জন্য সহজেই আমরা নির্ণয় করতে পারব যখন y এর জন্য $y = px + q \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots$ এই বিস্তৃতি ধরা হবে। এখানে y এর এই বিস্তৃতিটি ম্যাক্লরিনস্ এর উপপাদ্যের (Maclaurin's Theo.) সাহায্যে পাওয়া যায় এবং ঐ বিস্তৃতির মধ্যে p এবং q এইগুলির দ্বারা $f'(0)$, $f''(0)$ প্রভৃতি বুঝান হয়েছে।

এবার, x এর সমঘাতের সহগগুলিকে শূন্যের সঙ্গে সমান করে ধরলেই আমাদের প্রয়োজনীয় অভেদটি পাওয়া যাবে। নীচের উদাহরণটির সাহায্যে পদ্ধতিটিকে আরও পরিষ্কার ভাবে দেখান হল।

উদাহরণ : মূলবিন্দুতে $y = x + x^2 + 2xy + y^2$ এই বক্ররেখাটির বক্রতা ব্যাসার্ধ বাহির কর।

সমাধান : (i) বিস্তৃতি প্রণালী : প্রদত্ত সমীকরণটির উভয়দিকেই

$y = px + q \cdot \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots$ বসিয়ে পাওয়া যায় যে,

$$(p-1)x + \left(\frac{q}{2} - 1 - 2p - p^2\right)x^2 + x\text{এর উচ্চতর ঘাতযুক্ত রাশি} = 0$$

এখন x এবং x^2 এর সহগগুলিকে শূন্যের সঙ্গে সমান ধরলে পাওয়া যাবে,

$$p - 1 = 0 \quad \text{or,} \quad p = 1$$

এবং $q/2 = 1 + 2p + p^2$; বা, $q = 8$

অতএব মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ $\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$

(ii) **প্রতিস্থাপন প্রণালী :** এই পদ্ধতি অনুসারে আমরা প্রথমে y_1 এবং y_2 এর মান নির্ণয় করব। সুতরাং যেহেতু বক্ররেখাটির সমীকরণ দেওয়া আছে—

$$y = x + x^2 + 2xy + y^2$$

$$\therefore\ y_1 = 1 + 2x + 2y_1x + 2y + 2yy_1$$

আবার, $y_2 = 2 + 2y_2x + 2y_1 + 2y_1 + 2y_1^2 + 2yy_2$.

$$= 2(1 + y_2x + 2y_1 + yy_2 + y_1^2)$$

এখন $(0, 0)$ বিন্দুতে $(y_1)_0 = 1$ এবং $(y_2)_0 = 8$

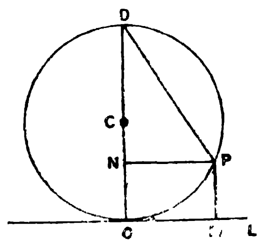
অতএব মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ $\rho = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

(C) নিউটনীয় প্রণালী (Newton's method)

উপপাদ্য—যদি মূলবিন্দুগামী কোন একটি বক্ররেখা OP এর উপর $P(x, y)$ যে কোন একটি বিন্দু হয় এবং যদি $ax+by=0$ এই সরলরেখাটি মূলবিন্দুতে বক্ররেখাটির সঙ্গে একটি স্পর্শক হয় তবে মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ হবে

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y/x\to a/b}}\left(\frac{x^2+y^2}{ax+by}\right).$$

প্রমাণঃ মনে করি, OP বক্ররেখাটির O বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত টানা হয়েছে এবং OL এই সরলরেখাটি O বিন্দুতে বৃত্তটির সঙ্গে একটি স্পর্শক। ধরা যাক



C বিন্দুটি উহার কেন্দ্র এবং উহার ব্যাস OD ; মনে করি, বৃত্তটি OP বক্ররেখার উপর P বিন্দু দিয়া যায়। এখন OP এবং DP যোগ করা হল। মনে করি OD এবং OL সরলরেখা দুইটির উপর যথাক্রমে PN এবং PM লম্বদ্বয় টানা হয়েছে।

এখন প্রাথমিক জ্যামিতির ধারণা থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$ON\cdot ND=PN^2$$

$$\therefore\quad ND=\frac{PN^2}{ON},\quad \text{বা}\quad OD-ON=\frac{PN^2}{ON}$$

$$\therefore\quad OD=\frac{PN^2}{ON}+ON=\frac{PN^2+ON^2}{ON}=\frac{OP^2}{ON}=\frac{OP^2}{PM}=\frac{x^2+y^2}{\dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{ax+by}.$$

এবার $P\to 0$ এই সীমা অবস্থানে (অর্থাৎ যখন $x\to 0$ এবং $y\to 0$) বৃত্তটিকে O বিন্দুতে একটি তিন বা ততোধিক বিন্দুস্পর্শী বৃত্ত (Osculating circle) এবং এই অবস্থায় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r\to\rho$.

অতএব এখন মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধের (ρ) জন্য লেখা যায়,

$$OD = 2\rho = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ \frac{y}{x}\to\left(\frac{-a}{b}\right)}} \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{ax+by}$$

বিশেষ অবস্থা 1. যখন x অক্ষটি ($y=0$) মূল বিন্দুতে স্পর্শক হয় তখন লেখা যায়—

$$2\rho = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{1^2+0^2}\,\frac{x^2+y^2}{y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

বিশেষ অবস্থা 2. আবার, y অক্ষটি ($x=0$) মূল বিন্দুতে স্পর্শক হয় তখন,

$$2\rho = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

উদাহরণ : $x^3+y^3-2x^2+6y=0$ এই বক্ররেখাটির মূল বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে বক্ররেখাটি মূল বিন্দু দিয়া যায়, এবং মুল বিন্দুতে স্পর্শকটি $y=0$ বা $x-$অক্ষ।

এখন নিউটনের সূত্রের প্রয়োগে পাওয়া যায়,

$$\rho = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}$$

এখন বক্ররেখার সমীকরণকে y দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়,

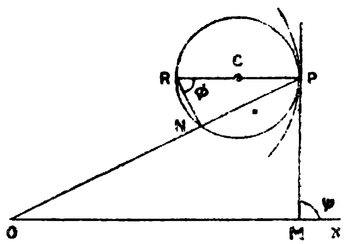
$$\frac{x^3}{y}+y^2-2\cdot\frac{x^2}{y}+6=0,$$

এবার যখন $x\to 0$ তখন $-2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y}+6=0.$

বা, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y}=3$ $\quad\therefore\quad \rho=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2y}=\frac{3}{2}$

11.06 মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া বক্রতা জ্যার দৈর্ঘ্য :

মনে করি P প্রদত্ত বক্ররেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু এবং PN ঐ বিন্দুতে বক্রতাবৃত্তের জ্যা যাহা মূল বিন্দুগামী ; C বক্রতা-বৃত্তের কেন্দ্র এবং PM, P বিন্দুতে



স্পর্শক। PC যোগ করে R পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। আবার RN যোগ করা হল। এখন যেহেতু $\angle PNR$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, অতএব $\angle PNR =$ এক সমকোণ। ধরি, $\angle OPM = \phi$ এবং $\angle PMX = \psi$। এখন ত্রিভুজ, $\triangle PNR$ থেকে পাই,

$$PN \text{ জ্যা} = PR \cos RPN = 2\rho \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$= 2\rho \sin \phi = 2r\frac{dr}{dp} \cdot \frac{p}{r} = 2p\frac{dr}{dp}$$

অতএব মূলবিন্দু দিয়া বক্রতা জ্যা $= 2p\dfrac{dr}{dp}$.

মন্তব্য :—

(i) X অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল বক্রতা জ্যাটি হবে, $2\rho \sin \psi$, যখন $\psi =$ জ্যা এবং স্পর্শকের অন্তর্ভূত কোণ।

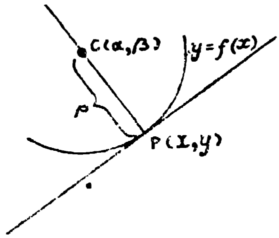
(ii) y অক্ষের সঙ্গে সমান্তরাল বক্রতা জ্যাটি হবে $2\rho \sin (90 - \psi)$ বা $2\rho \cos \psi$. যখন স্পর্শক এবং জ্যার মধ্যে কোণ $(90 - \psi)$।

11.07 বক্রতাকেন্দ্রের স্থানাংক :

এই অনুচ্ছেদে আমরা দেখব যে, $y = f(x)$ একটি বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ যে কোন একটি বিন্দুর সাপেক্ষে বক্রতাকেন্দ্রের স্থানাংকটি (α, β), যেখানে

$$(\alpha, \beta) = \left[x - \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2},\ y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}\right];\ y_2 \neq 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (A)$$

প্রমাণ : মনে করি, বক্ররেখাটির উপর $P(x, y)$ বিন্দুর সাপেক্ষে C



বক্রতাকেন্দ্রের স্থানাংক (α, β)। অতএব P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ

$$Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)=-\frac{1}{y_1}(X-x)$$

বা, $y_1(Y-y)=-(X-x)$

এখন (α, β) অর্থাৎ বক্রতাকেন্দ্রটি যদি অভিলম্বের উপর অবস্থান করে তবে,

$$y_1(\beta-y)=-(\alpha-x) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

আবার, $\rho^2=PC^2=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (2)$

এখন, (1) ও (2) থেকে α এখন β পাওয়া যাবে,

(1) নং থেকে পাই, $(\alpha-x)=-y_1(\beta-y)$

$\therefore \quad y_1{}^2(\beta-y)^2+(\beta-y)^2=\rho^2$

বা, $(\beta-y)^2(y_1{}^2+1)=\rho^2$

বা, $(\beta-y)\sqrt{y_1{}^2+1}=\dfrac{(1+y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}$

বা, $\beta-y=\dfrac{1+y_1{}^2}{y_2}$

বা, $\beta=y+\dfrac{1+y_1{}^2}{y_2}$

আবার (1) নং থেকেই পাওয়া যায়,

$$\alpha+x=y_1(\beta-y)$$

$$=y_1\frac{1+y_1{}^2}{y_2} \quad \left[\because \quad \beta-y=\frac{1+y_1{}^2}{y_2}\right]$$

$$\therefore \quad \alpha=x-y_1\frac{1+y_1{}^2}{y_2}$$

মন্তব্য ঃ—

(i) যখন বক্রতাকেন্দ্রের স্থানাংকটি জানা থাকবে, তখন বক্রতাবৃত্তের সমীকরণটি হবে $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$.

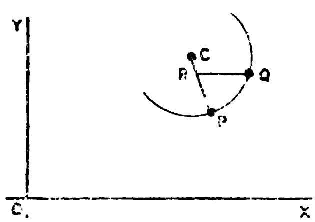
(ii) যখন x_1 এবং x_2 যথাক্রমে y এর সাপেক্ষে x এর প্রথম এবং দ্বিতীয় অন্তরকলজ হয় তখন (A) সূত্রটিকে নিম্নলিখিতভাবে দেখান যেতে পারে,

$$\alpha=x+\frac{1+x_1^2}{x_2},\quad \beta=y-\frac{x_1(1+x_1^2)}{x_2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (B)$$

এবং এই সূত্রটি দরকার হয় যখন y_1 অনির্শিচত।

11.08 বক্রতাকেন্দ্রের ধর্ম ঃ

এই অনুচ্ছেদে আমাদের দেখাতে হবে যে, কোন একটি বক্ররেখার উপর দুইটি কাছাকাছি অবস্থিত বিন্দু P, Q-তে অঙ্কিত অভিলম্ব দুটির ছেদবিন্দু সীমা অবস্থানটি $(Q\to P)$ বক্ররেখার উপর P বিন্দুটির জন্য বক্রতাকেন্দ্র।



P বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(Y-y)y_1+(X-x)=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু $P(x, y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি (slope) $y_1=\frac{dy}{dx}=\phi(x)$ (ধরি) এবং মনে করি (x, y) অভিলম্বের উপর যে কোন একটি বিন্দু। যে কোন একটি কাছাকাছি অবস্থিত বিন্দু $Q(x+h, y+k)$ তে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$(Y-y-k)\phi(x+h)+(X-x-h)=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবার ছেদবিন্দুর কোটির (ordinate) জন্য (1) এবং (2) থেকে পাই

$$(Y-y)\{\phi(x+h)-\phi(x)\}-k\phi(x+h)-h=0 \quad \cdots \quad \cdots (3)$$

এখন h দ্বারা ভাগ করে এবং $h\to 0$ হলে $Y\to\beta$ লক্ষ্য করে পাই

$$(\beta-y)\left\{\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\right\}-\left\{\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}\right\}\left\{\lim_{h\to 0}\phi(x+h)\right\}$$

বা $(\beta - y)\ \dfrac{d}{dx}\{\ \phi(x)\ \} - \phi(x)\cdot\phi(x) - 1 = 0$

বা, $(\beta - y)y_2 - y_1{}^2 - 1 = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

আবার যেহেতু $Q \to P$ অবস্থায় ছেদবিন্দু (α, β), (1)নং সমীকরণের উপর একটি বিন্দু, সুতরাং লেখা যায়,

$$(\beta - y)\phi(x) + (\alpha - x) = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

বা, $(\beta - y)y_1 + (\alpha - x) = 0$

এখন (4) নং ও (5) নং সমীকরণ দুটি থেকে সহজেই (α, β) এর মান পাওয়া যাবে এবং দেখা যাবে যে (α, β) এর মান বক্রতা কেন্দ্রের স্থানঙ্কের সমান হবে। অতএব প্রমাণ করা গেল যে (α, β) বা C বিন্দুটিই বক্রতাকেন্দ্র।

11.9 বক্রতা কেন্দ্রজ (Evolute) এবং বক্রতা প্রতিকেন্দ্রজ (Involute)।

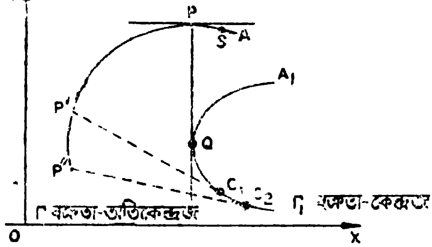
11.08 নং অনুচ্ছেদে আমারা দেখেছি যে $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর যদি $P(x, y)$ বিন্দুটি থাকে তবে, বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাংক $C(\alpha, \beta)$

$$\equiv\left[x - \frac{y_1(1 + y_1{}^2)}{y_2},\quad y + \frac{1 + y_1{}^2}{y_2}\right],\quad \text{যখন বক্রতা } k = \frac{1}{\rho} \neq 0$$

এখন এই অবস্থায় P বিন্দুটি যখন বক্ররেখা বরাবর অগ্রসর হয় তখন C বিন্দুটির সঞ্চারপথটিকে বলা হবে P বক্ররেখাটির জন্য **বক্রতাকেন্দ্রজ** (I_1) ; আবার বলা যায় যদি $y = f(x)$ বক্ররেখাটির I_1 একটি বক্রতাকেন্দ্রজ হয়, তবে $y = f(x)$ বক্ররেখাটিকে বলা হবে I_1 এর একটি **বক্রতা প্রতিকেন্দ্রজ**। এখন যেহেতু y, y_1 এবং y_2 তিনটিই x এর ফাংশন, অতএব

$$\alpha = x - \frac{y_1(1 + y_1{}^2)}{y_2}$$

এবং $$\beta = y + \frac{1 + y_1{}^2}{y_2}$$



এই সমীকরণদ্বয়কে 'বক্রতা কেন্দ্রজ' এর জন্য প্রমাত্রিক (উপমাত্রিক) **(Parametric)** সমীকরণ হিসাবে ধরা যেতে পারে। আবার এখানে α, β এবং বক্ররেখার সমীকরণটির

মধ্যে x এবং y কে অপনয়ন করলে বক্রতা-কেন্দ্রজ এর কার্টেসীয় সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

উদাহরণ : $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটির বক্রতা-কেন্দ্রজ বাহির কর।

সমাধান : এখানে (x, y) বিন্দুতে বক্রতা কেন্দ্রের স্থানাংক,

$$\alpha=3x+2a, \quad \left(\text{অথবা } x=\frac{\alpha-2a}{3}\right)$$

$$\text{ও } \beta=\frac{-2}{\sqrt{a}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{a}}\left(\frac{\alpha-2a}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots(1)$$

অতএব (1)নং সমীকরণের উভয়দিকে বর্গ করে এবং α ও β এর স্থানে যথাক্রমে x ও y বসিয়ে পাই,

$$27ay^2=4(x-2a)^2$$

বিশেষ উদাহরণ সমুহ

উদাহরণ 1 $r=a \sin n\theta$ এই বক্ররেখার x-অক্ষরেখা মূলবিন্দুতে স্পর্শক ধরে নিয়ে নিউটন সূত্রের সাহায্যে মূলবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে নিউটনের সুত্রের প্রয়োগে পাওয়া যায়—

$$\rho=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{2y}=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\to 0}}\left(\frac{r^2 \cos^2\theta}{2r \sin\theta}\right)$$

$$\therefore \quad \rho=\lim_{\substack{r\to 0\\ \theta\to 0}} \frac{r\cos^2\theta}{2\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0} \frac{a \sin n\theta \cos^2\theta}{2\sin\theta}$$

$$=\frac{an}{2}\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\sin n\theta}{n\theta}\cos^2\theta}{\frac{\sin\theta}{\theta}}$$

$$=\frac{an}{2};$$

যেহেতু $\lim_{\theta\to 0} \cos^2\theta=1$

এবং $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=1.$

উদাহরণ 2 দেখাও যে মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া $r^m = a^m \cos m\theta$ এই বক্ররেখার বক্রতা জ্যা $= \dfrac{2r}{m+1}$

সমাধান ঃ এখানে বক্ররেখার সমীকরণ দেওয়া আছে $r^m = a^m \cos m\theta$ ইহার উভয় দিকের লগারিদমের সাহায্যে পাওয়া যায়,

$$m \log r = m \log a + \log \cos m\theta$$

এখানে আবার, উভয়দিকে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = -\tan m\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} + m\theta\right)$$

$$\therefore \quad \cot \phi = \cot\left(\frac{\pi}{2} + m\theta\right)$$

বা, $\phi = \dfrac{\pi}{2} + m\theta$

$$\therefore \quad p = r \sin \phi = r \cos m\theta = r\frac{r^m}{a^m} = \frac{r^{m+1}}{a^m}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dr} = \frac{(m+1)r^m}{a^m}$$

$\therefore$ বক্রতা-জ্যা $= 2\rho \sin \phi = 2r\dfrac{dr}{dp}\dfrac{p}{r} = 2p\dfrac{dr}{dp}$

$$= 2\frac{a^m}{(m+1)r^m}\frac{r^{m+1}}{a^m} = \frac{2r}{m+1}$$

উদাহরণ 3 দেখাও যে, মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া, $p = f(r)$ বক্ররেখার জন্য বক্রতা-জ্যা $= 2f(r)/f'(r)$

সমাধান ঃ এখানে বক্ররেখার সমীকরণ দেওয়া আছে, $p = f(r)$

$\therefore \quad \dfrac{dp}{dr} = f'(r)$, সুতরাং $\rho = r\dfrac{dr}{dp} = \dfrac{r}{f'(r)}$

এখন মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া বক্রতা জ্যা

$$= 2\rho \sin \phi = \frac{2r}{f'(r)}\frac{p}{r} \quad [\because \quad p = r \sin \phi]$$

$$= \frac{2p}{f'(r)} = \frac{2f(r)}{f'(r)} \quad [\because \quad p = f(r)]$$

উদাহরণ 4 $s=\sqrt{8ay}$ বক্ররেখার জন্য প্রমাণ কর যে $\rho=4a\sqrt{1-\frac{y}{2a}}$

সমাধান : এখানে, $s=\sqrt{8ay}$ এই সমীকরণের উভয়দিকে s এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই,

$$1=\sqrt{8a}\cdot\tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{ds}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{ds}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{8a}}$$

$$=\frac{s}{4a}$$

অর্থাৎ $\sin\psi=\frac{s}{4a}$

আবার s এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\cos\psi\frac{d\psi}{ds}=\frac{1}{4a}$$

বা $\frac{ds}{d\psi}=4a\cos\psi$

$$\therefore\quad \rho=4a\sqrt{1-\sin^2\psi}$$

$$=4a\sqrt{1-\frac{s^2}{16a^2}}$$

$$=4a\sqrt{1-\frac{y}{2a}}$$

উদাহরণ 5 $r=a(1+\cos\theta)$ এই বক্ররেখাটির জন্য প্রমাণ কর যে $\frac{\rho^2}{r}$ একটি ধ্রুবক, যেখানে $\rho=$ বক্রতা-ব্যাসার্দ্ধ

সমাধান : এখানে $r=a(1+\cos\theta)$

$\therefore\quad r_1=-a\sin\theta$ এবং $r_2=-a\cos\theta$

$$\therefore\quad \rho=\frac{\{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin\theta\}^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta+a^2\cos\theta\,(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{(2a^2+2a^2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{3a^2+3a^2\cos\theta}=\frac{2^{\frac{3}{2}}a^3(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}a(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho^2=\frac{8}{9}a^2(1+\cos\theta)=\frac{8}{9}ar$$

$$\therefore\quad \frac{\rho^2}{r}=\frac{8}{9}a$$

এখন যেহেতু $\frac{8a}{9}$ একটি ধ্রুবক,

সুতরাং প্রমাণ করা গেল যে, $\frac{\rho^2}{r}=$ ধ্রুবক।

উদাহরণ 6

$s=a\ \log\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}\right)$ এই বক্ররেখার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\rho=a\sec\psi$.

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণকে লেখা যেতে পারে,

$$s=a\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)$$

এখন $\frac{d}{d\psi}\left\{\log\ \tan\left(\frac{\pi}{4}+\psi/2\right)\right\}$

$$=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}\ \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{4}+\psi/2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\tan\psi/2}{1-\tan\psi/2}+\frac{1-\tan\psi/2}{1+\tan\psi/2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2(1+\tan^2\psi/2)}{1-\tan^2\psi/2}\right]=\sec\psi.$$

অতএব $\rho=\frac{ds}{d\psi}=a\sec\psi.$

বিবিধ অনুশীলনী 11

1. দেখাও যে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্দ্ধ $\rho=3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

2. দেখাও যে $x=a\ (\theta+\sin\theta)$, $y=a\ (1-\cos\theta)$ বক্ররেখার বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ $\rho=4a\cos\theta/2$

3. $x=a\,(\theta-\sin\theta)$, $y=a\,(1-\cos\theta)$ বক্ররেখার উপর P ও Q এমন দুইটি বিন্দু যেখানে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। যদি এই দুটি বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ যথাক্রমে ρ_1 এবং ρ_2 হয় তবে দেখাও যে

$$\rho_1{}^2+\rho_2{}^2=16a^2.$$

[**সঙ্কেত:** P বিন্দুতে (ধর θ_1 বিন্দুতে) এবং Q বিন্দুতে (ধর θ_2 বিন্দুতে) স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\theta_1}\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\theta_2}=-1$

অর্থাৎ $\cot\dfrac{\theta_1}{2}\cot\dfrac{\theta_2}{2}=-1$

অর্থাৎ $\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}=\cos^2\dfrac{\theta_2}{2}$; এখন $(\rho)_{\theta_1}\equiv\rho_1=-4a\sin(\theta_1/2)$

এবং $(\rho)_{\theta_2}\equiv\rho_2=-4a\sin\dfrac{\theta_2}{2}$;

অতএব $\rho_1{}^2+\rho_2{}^2=16a^2\left(\sin^2\dfrac{\theta_1}{2}+\sin^2\dfrac{\theta_2}{2}\right)$

$=16a^2\left(\cos^2\dfrac{\theta_2}{2}+\sin^2\dfrac{\theta_2}{2}\right)=16a^2$]

4. দেখাও যে $y=c\ \cosh\ x/c\ (c>0)$ বক্ররেখার $(0, c)$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধের মান অবম। এই ফলটির জ্যামিতিক অর্থ কি ?

[জ্যামিতিক অর্থ—$(0, c)$ বিন্দুটি বক্ররেখার শীর্ষবিন্দু]

5. দেখাও যে $x^2+xy+y^2=3$ বক্ররেখার $(1, 1)$ বিন্দুতে বক্রতা $=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

6. দেখাও যে $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$ বক্ররেখার বক্রতাকেন্দ্র (α, β)

যেখানে $\alpha=x-\dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}$

$$\beta=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}$$

এখন প্রমাণ কর $x=a\ (t-\sin t),\ y=a\ (1-\cos t)$ বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্র $(\alpha,\ \beta)$, যেখানে

$$\alpha=a\ (t+\sin t),\quad \beta=-a\ (1-\cos t)$$

মনে কর $\alpha=\xi-\pi a,\ \beta=\eta-2a$ এবং $t=\tau-\pi$; তাহলে প্রমাণ কর প্রদত্ত বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্রজের (evolute) প্রমাত্রিক সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$\xi=a\ (\tau-\sin\tau)$$
$$\eta=a\ (1-\cos\tau)$$

7. দেখাও যে $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ বক্ররেখার বক্রতাকেন্দ্র $(\alpha,\ \beta)$, যেখানে

$$\alpha=\left(a-\frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$$

$$\beta=\left(b-\frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$$

এখন t এর অপনয়ন দ্বারা প্রমাণ কর প্রদত্ত বক্ররেখার বক্রতা-কেন্দ্রজের সমীকরণ

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

8. দেখাও যে $x=a\cos^3\theta,\ \ y=a\sin^3\theta$ বক্ররেখার বক্রতা-ব্যাসার্দ্ধ $=3a\sin\theta\cos\theta$ এবং বক্রতাকেন্দ্র $(\alpha,\ \beta)$ যেখানে

$$\alpha=a\cos^3\theta+3a\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\beta=a\sin^3\theta+3a\sin\theta\cos^2\theta$$

9. প্রমাণ কর $y=x^2$ বক্ররেখার $(1,\ 1)$ বিন্দুতে বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ নিম্নরূপ :

$$(x+4)^2+(y-\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{125}{4}$$

10. দেখাও যে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ অবম।

11. দেখাও যে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার বক্রতা কেন্দ্র $(\alpha,\ \beta)$ যেখানে

$$\alpha=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad \beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$

12. দেখাও যে $y=x+3x^2-x^3$ বক্ররেখার $(0,\ 0)$ বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ $=\frac{\sqrt{2}}{3}$

13. দেখাও যে $x+y=ax^2+by^2+cx^3$ বক্ররেখার $(0, 0)$ বিন্দুতে বক্রতা বৃত্তের সমীকরণ $(a+b)(x^2+y^2)=2(x+y)$.

14. প্রমাণ কর $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ বক্ররেখার t বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ

$$=(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}/(ab)$$

15. প্রমাণ কর $y=a\log\sec x/a$ বক্ররেখার y-অক্ষের সমান্তরাল বক্রতা জ্যার দৈর্ঘ্য ধ্রুবক।

16. দেখাও যে $y=f(x)$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্দ্ধ অবম যেখানে নিম্নলিখিত সমীকরণটি সিদ্ধ হবে :

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

17. প্রমাণ কর যে একটি অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্দ্ধের মান ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের যে অংশ অধিবৃত্ত ও নিয়ামকের মধ্যে অবস্থিত তার দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ।

18. $r=l(1+e\cos\theta)^{-1},\ 0<e<1,$ বক্ররেখাটির যে কোন (r, θ) বিন্দুতে বক্রতা-ব্যাসার্দ্ধের মান নির্ণয় কর এবং সেই মান থেকে দেখাও যে $\theta=\pi/2$ এর ক্ষেত্রে $\rho=l(1+e^2)^{\frac{3}{2}}$.

19. $r=a\theta$ এবং $r\theta=a$ বক্ররেখা দুটির ছেদবিন্দু দুটিতে বক্রতার অনুপাত $3 : 1$.

20. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে যদি বক্রতাকেন্দ্র (α, β) হয় তবে দেখাও $\alpha+\beta=3(x+y)$.

দ্বাদশ অধ্যায়

অভিসারক

12.01 প্রাথমিক মন্তব্য : স্থানাঙ্ক জ্যামিতি পড়বার সময় আমরা লক্ষ্য করেছি যে, কোন কোন বক্ররেখা সমতলের একটি নির্দিষ্ট অংশের মধ্যে থাকে, আবার কয়েকটি বক্ররেখা বা উহার একটি অংশ বা শাখা অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে। যেমন উদাহরণ স্বরূপ বলা যেতে পারে যে $x^2+y^2=a^2$ এই বৃত্তটি সম্পূর্ণভাবে সমতলের সান্ত অংশে অবস্থিত। কিন্তু $x^2-y^2=a^2$ এই পরাবৃত্তটির ক্ষেত্রে আমরা দেখতে পাই যে উহা অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত। আবার উপরোক্ত পরাবৃত্তটির জন্য দেখা যায় $y^2=x^2-a^2$ বা $y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$, অতএব দেখা গেল পরাবৃত্তটির জন্য আমরা y এর দুইটি মান পাই। সুতরাং এখান থেকেই আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, $x^2-y^2=a^2$ পরাবৃত্তটির দুইটি শাখা আছে, যাদের বিস্তৃতি সীমাহীন বা সীমাবদ্ধ নয়।

অন্তরকলন বিদ্যার প্রথম দিকে সীমার অধ্যায়ে আমরা $x\to\pm\infty$ বা $y\to\pm\infty$ এই চিহ্নগুলির সহিত পরিচিত হয়েছি। কিন্তু যখন কোন বক্ররেখার অসীম শাখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু হয় তখন $P\to\infty$ বলতে কি বুঝায়, তা মোটামুটিভাবে ঐ অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে।

কোন বক্ররেখার অসীম শাখার উপর অবস্থিত (x, y) স্থানাংক-বিশিষ্ট একটি বিন্দু P কে অসীম (∞) এর দিকে বক্ররেখাটি বরাবর ক্রমশ অগ্রসরমান বলা হয় যদি x অথবা y বা x এবং y উভয়েই $\pm\infty$ এর দিকে ক্রমশঃ অগ্রসর হয় এবং P বিন্দুটি আলোচ্য বক্ররেখা বরাবর অগ্রসর হয়। এরূপ অবস্থায় যখন বক্ররেখাটি সমতলে অনন্ত দূরত্বে একটি সরলরেখার অভিমুখী হয় তখনই বক্ররেখার অভিসারকের (asymptote) সম্ভাবনা থাকে।

12.02 অভিসারকের সংজ্ঞা : কোন একটি বক্ররেখার অভিসারকের সংজ্ঞা হিসাবে এমন একটি সরলরেখা বুঝায় যাহা মূলবিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত হয়ে বক্ররেখাটির উপর মূলবিন্দু থেকে অসীম দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুগুলিতে ছেদ করে। এরূপ সংজ্ঞা স্থানাংক জ্যামিতিতে দেখা যায়। কিন্তু এরূপ সংজ্ঞা ভ্রান্তিমূলক। কলনবিদ্যায় অভিসারকের ধারণা আমরা নিম্নলিখিতভাবে করি। যখন

কোন একটি বক্ররেখার অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত শাখাটির উপর P যে কোন একটি বিন্দু হয়, এবং P আলোচ্য বক্ররেখা বরাবর অনন্তের দিকে অগ্রসর হয় বা $P \to \infty$ হয়, তখন মূল বিন্দুটি থেকে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে একটি সরলরেখাকে ঐ বক্ররেখার একটি অভিসারক বলা হয়, যদি ঐ সরলরেখাটি থেকে P বিন্দুর দূরত্ব শূন্যের (zero) অভিমুখী হয়।

এখন উপরোক্ত সংজ্ঞার্থ থেকে বলা যেতে পারে যে, যদি কোন বক্ররেখা সম্পূর্ণভাবে সমতলের নির্দিষ্ট অংশে অবস্থিত থাকে, তবে তাহার কোন অভিসারক থাকে না।

অভিসারকের প্রকারভেদ : এতক্ষণ উপরে অভিসারকের যে সংজ্ঞা দেওয়া হল তাকে বলা হয় রৈখিক অভিসারক (rectilinear asymptote)। রৈখিক অভিসারক ছাড়াও বক্ররেখ অভিসারক (curvilinear asymptote) নামে অন্য এক ধরণের অভিসারক দেখা যায়, যা আমাদের আলোচনার বিষয়বস্তু নয়। সুতরাং আমরা এখন থেকেই রৈখিক অভিসারকের পরিবর্তে কেবলমাত্র অভিসারক কথাটি ব্যবহার করব।

অভিসারক আবার বিভিন্ন প্রকারের হতে পারে, যেমন অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল এবং অক্ষদ্বয়ের অসমন্তরাল। অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারকগুলিকে যথাক্রমে অনুভূমিক এবং উল্লম্ব অভিসারক বলা হয়। আবার অক্ষদ্বয়ের অসমান্তরাল অন্যান্য অভিসারকগুলিকে বলা হয় তির্যক অভিসারক (inclined asymptotes)।

এখন পরবর্তী অনুচ্ছেদে আমরা বিভিন্ন প্রকার অভিসারকগুলির সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা করব এবং বিভিন্ন ধরণের বক্ররেখার জন্য অভিসারক নির্ণয় করার নিয়মগুলিকেও দেখান হবে যেগুলিকে অভিসারক নির্ণয় করার কয়েকটি কার্যকরী পদ্ধতি হিসাবে বিবেচিত করা হবে।

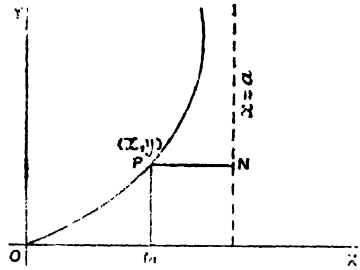
12.03 কয়েকটি বিভিন্ন ধরণের অভিসারক : এক্ষেত্রে প্রথমে আমরা Y অক্ষের সহিত সমান্তরাল অভিসারকগুলির সম্বন্ধে আলোচনা করব।

উপপাদ্য (i) $x=a$ সরলরেখাটি $y=f(x)$ বক্ররেখাটির একটি অভিসারকের আবশ্যকীয় এবং পর্যাপ্ত সর্ত এই যে $|f(x)| \to \infty$ যখন $x \to a+0$, অথবা $x \to a-0$ অথবা $x \to a$.

প্রমাণ : প্রথমে মনে করি যখন $x \to a-0$

তখন $|f(x)| \to \infty$ অর্থাৎ $y \to \pm\infty$; এখন P বিন্দু থেকে $x=a$ সরলরেখায় লম্ব দূরত্ব $PN=a-x$ অথবা $|x-a|$ যা $x \to a-0$ এই অবস্থায় শূন্যের

অভিমুখী হয় ($|x-a| \to 0$)। সুতরাং এই অবস্থায় বলা যেতে পারে যে, $x=a$ একটি অভিসারক।



বিপরীতভাবে মনে করি $x=a$ সরলরেখাটি একটি অভিসারক।

আবার যেহেতু $x \to a-0$, অতএব প্রমাণ থেকে বলতে পারি, $|f(x)| \to \infty$, অন্যথায় P বিন্দুটি অসীমের (∞) দিকে অগ্রসর হতে পারে না বা $P \to \infty$ হয় না, যাহা অভিসারক নির্ণয়ের জন্য অবশ্য প্রয়োজনীয়।

আবার একই যুক্তি সহযোগে প্রমাণ করা যায় যখন $x \to a+0$ অথবা $x \to a$, তখন যদি $|f(x)| \to \infty$ তবে $x=a$ একটি অভিসারক এবং বিপরীতভাবে কথাটি সত্য।

এখন X-অক্ষের সমান্তরাল অভিসারক আলোচনা করা হবে।

উপপাদ্য (ii) $y=b$ সরলরেখাটিকে $x=\phi(y)$ বক্ররেখাটির একটি অভিসারক হওয়ার আবশ্যকীয় এবং পর্যাপ্ত সর্তটি এই যে $|x| \to \infty$, যখন $y \to b \pm 0$ বা $y \to b$.

প্রমাণ ঃ এক্ষেত্রে উপপাদ্য (i) এর মত খুব সহজেই উপরোক্ত সর্তটিকে প্রমাণ করে দেখান যেতে পারে।

উদাহরণ 1. $y=\dfrac{2}{x-5}$ বক্ররেখাটির $x=5$ সরলরেখা একটি উল্লম্ব অভিসারক কারণ, যখন $x \to 5$ তখন $|y| \to \infty$

উদাহরণ 2. $y=\tan x$ বক্ররেখার নিম্নলিখিত সরলরেখাগুলি উল্লম্ব অভিসারক

$$x=\pm\pi/2,\ x=\pm\frac{3\pi}{2},\quad x=\pm\frac{5\pi}{2},\ \ldots\ldots$$

উদাহরণ 3. $y=e^{1/x}$ বক্ররেখার $x=0$, একটি উল্লম্ব অভিসারক কারণ

$$\lim_{x \to 0+} e^{1/x}=\infty$$

উদাহরণ 4. $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$ বক্ররেখার $x=0$ একটি উল্লম্ব অভিসারক কারণ, যখন $x\to 0-$, তখন $y=+\infty$ এবং যখন $x\to 0+$, তখন $y\to -\infty$.

উদাহরণ 5. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ বক্ররেখার $x^2=\pm 1$ উল্লম্ব অভিসারক।

12.04 f(x, y) = 0 সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত বক্ররেখার অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারক নির্ণয়

এখানে মনে করি $f(x, y)\equiv y^n\psi(x)+y^{n-1}\psi_1(x)+y^{n-2}\psi_2(x)+\cdots\cdots$
$$+\psi_n(x)=0$$

উপরোক্ত সমীকরণটির থেকে আমরা দেখতে পাই যে উহাকে একটি y ঘাতের অবরোহণ অনুসারে সাজানো হয়েছে। $\psi(x)$, $\psi_1(x)\cdots\cdots$প্রভৃতি ফাংশনগুলি x এর বহুপদ (polynomial) ফাংশন। এখন উপরোক্ত সমীকরণটিকে y^n দ্বারা উভয় দিকে ভাগ করলে উহাকে নিম্নলিখিত ভাবে সাজিয়ে দেখান যেতে পারে,

$$\psi(x)+\frac{1}{y}\psi_1(x)+\cdots\cdots+\frac{1}{y^2}\psi_2(x)+\cdots\cdots+\frac{1}{y^n}\psi_n(x)=0$$

এবার ধরা যাক যদি কোন ক্ষেত্রে $y\to\infty$ এবং $\lim\limits_{y\to\infty} x=c$, হয় তবে সেই ক্ষেত্রে উপরোক্ত দ্বিতীয় সমীকরণটির থেকে পাওয়া যায় $\psi(c)=0$ অর্থাৎ $\psi(x)=0$ এই সমীকরণটির একটি বীজ c.

এখন আবার যদি, c_1, c_2, c_3, c_4 প্রভৃতি $\psi(x)=0$ সমীকরণের বাস্তব বীজ হয় তাহলে আমরা লিখতে পারি যে $x=c_1$, $x=c_2$, $x=c_3$, $x=c_4\cdots\cdots$এবং তখন উপরোক্ত সমীকরণগুলিকে Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারক বলা হয় যদি অবশ্য অভিসারকগুলির সাপেক্ষে বক্ররেখাটির অসীম শাখা বিদ্যমান থাকে।

আবার আমাদের জানা আছে যে যদি $\psi(x)=0$ সমীকরণের c_1, c_2, $c_3\cdots\cdots$ এইগুলি প্রত্যেকটি এক একটি বীজ হয়, তবে $\psi(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$ $\cdots\cdots$ অতএব এখন আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, একটি সাধারণ বীজগাণিতিক বক্ররেখা $f(x, y)=0$ এর Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলি নির্ণয় করার সময়, ওই বক্ররেখাটির সমীকরণে অবস্থিত y এর সর্বাধিক ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগগুলিকে শূন্যের সহিত সমান করে নিতে হবে।

এখানে যদি y এর সর্বাধিক ঘাতবিশিষ্ট পদের সহগ ধ্রুবক হয় অথবা বাস্তব

উৎপাদকে বিশ্লেষণযোগ্য না হয় তবে y অক্ষের সমান্তরাল কোন অভিসারকই এক্ষেত্রে থাকা সম্ভবপর নয়।

আবার অনুরূপভাবে $f(x, y) = 0$ এই সাধারণ বীজগাণিতিক বক্ররেখার X অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলি বাহির করার সময়, ঐ বক্ররেখাটির সমীকরণে x এর সর্বাধিক ঘাত বিশিষ্ট পদগুলির ধ্রুবক ব্যতীত সহগকে শূন্যের সহিত সমান করে নেওয়া হয়। এক্ষেত্রে যদি x এর সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত পদের সহগ ধ্রুবক হয় বা ইহার রৈখিক উৎপাদকটি অবাস্তব হয় তবে ধরা যায় যে, X অক্ষের সমান্তরাল কোন অভিসারক নাই।

উদাহরণ 1. $x^2y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0$ বক্ররেখার অভিসারকগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান :

$x = 0$ বা Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলি নির্ণয় করার জন্য আমরা x এর সর্বাধিক ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগ $(y^2 - y)$ কে শূন্যের সহিত সমান করে পাই

$$y^2 - y = 0.$$

বা $y(y-1) = 0.$

$\therefore \quad y = 0,$ এবং $y - 1 = 0$

একইভাবে $y = 0$, বা X অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলির জন্য আমরা পাই

$$x^2 - x = 0$$

বা $x(x-1) = 0$

$\therefore \quad x = x$ এবং $x - 1 = 0$

অতএব নির্ণেয় অভিসারকগুলি

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

দ্রষ্টব্য : চতুর্থঘাত সমীকরণটির চারটির বেশী অভিসারক থাকতে পারে না।

উদাহরণ 2. $a^2y^2 - b^2x^2 = x^2y^2$ এই বক্ররেখাটির অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারকগুলি বাহির কর।

সমাধান : আমাদের দেওয়া আছে,

$$a^2y^2 - b^2x^2 = x^2y^2$$

বা $x^2y^2 + b^2x^2 - a^2y^2 = 0$

বা $y^2(x^2 - a^2) + b^2x^2 = 0$

এখন উপরের সমীকরণটিতে দেখা যায় যে, y এর সর্বাধিক ঘাতযুক্ত পদের সহগ (x^2-a^2)। অতএব Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকের সমীকরণ হবে,

$$x^2-a^2=0 \quad \text{বা} \quad (x+a)(x-a)=0$$

$$\therefore \quad x+a=0 \text{ এবং } x-a=0.$$

আবার একই ভাবে, X অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলির জন্য x এর সর্বাধিক ঘাত বিশিষ্ট পদের সহগ (y^2+b^2) কে শূন্য সহিত সমান ধরলে পাওয়া যায় যে, $y^2+b^2=0$, বা $(y+ib)(y-ib)=0$, অতএব দেখা গেল যে, এখানে রৈখিক উৎপাদকগুলি কাল্পনিক, তাই X অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকগুলি কাল্পনিক সরলরেখা। অতএব এই বক্ররেখার X অক্ষের সমান্তরাল কোন অভিসারক নাই।

12.05 তির্যক অভিসারক

উপপাদ্য : যদি কোন বক্ররেখার একটি অসীম শাখার $y=mx+c$ একটি অভিসারক হয়, যখন m এবং c সান্ত, তখন

$$m=\lim_{|x|\to\infty}\frac{y}{x} \qquad \text{এবং } c=\lim_{x\to\infty}(y-mx) \quad \cdots \quad \text{(A)}$$

এখানে বক্ররেখার শাখাটির উপর P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক ধরা হয়েছে (x, y).

প্রমাণ : P বিন্দুটি থেকে $y=mx+c$ বা $y-mx-c=0$

এই সরলরেখাটির দূরত্ব $(d)=\dfrac{y-mx-c}{\sqrt{1+m^2}}$

এখন যদি $y=mx+c$ এই সরলরেখাটিকে একটি অভিসারক হতে হয় তবে d ক্রমশ শূন্যের দিকে অগ্রসর হবে বা $d\to 0$ যখন $P\to\infty$ অর্থাৎ $x\to\pm\infty$. এখন যেহেতু m কে সান্ত ধরা হয়েছে, অতএব,

$$\lim_{|x|\to\infty}(y-mx-c)=0 \quad \text{বা} \quad \lim_{|x|\to\infty}(y-mx)=c$$

আবার আমরা যেহেতু জানি যে,

$$\frac{y}{x}-m=(y-mx)\frac{1}{x}$$

অতএব, $$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{y}{x}-m\right)=\lim_{|x|\to\infty}(y-mx)\times\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$=c\times 0=0$$

$$\therefore \quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{y}{x}=m$$

আবার বিপরীতভাবে বলা যায় যদি (A) এর সমীকরণগুলি সিদ্ধ হয় যখন $P \to \infty$, তখন $y - mx - c \to 0$ এবং এই কারণে $d \to 0$, যাহা প্রমাণ করে যে $y - mx - c = 0$ বা $y = mx + c$ একটি অভিসারক যেহেতু $P \to \infty$.

এখন উপরের প্রমাণটির সাহায্যে আমরা অসীম শাখা সমন্বিত কোন একটি বক্র-রেখার Y অক্ষের অসমান্তরাল অভিসারকগুলি নির্ণয় করতে পারি। যেমন $y = f(x)$ বা $f(x, y) = 0$ ইহা যদি কোন বক্ররেখার সমীকরণ হয়, তবে সর্বপ্রথমে আমাদের $\lim_{|x| \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right)$ নির্ণয় করতে হবে এবং বিভিন্ন বক্ররেখার ক্ষেত্রে দেখা যাবে উহার বিভিন্ন সান্ত মান আছে। মনে করা যাক m' এরূপ একটি মান। এখন আমাদের $\lim_{|x| \to \infty} (y - mx)$ এর মান নির্ণয় করতে হবে ; মনে করি ইহা c'.

অতএব এখন বলা যায় যে $y = m'x + c'$ এই সরলরেখাটি বক্ররেখাটির একটি অভিসারক।

মন্তব্য : (i) যদি বক্ররেখার সমীকরণ হয় $y = mx + c + \theta(x)$. যখন $\theta(x) \to 0$, $|x| \to \infty$ তখন অভিসারকের সমীকরণটি দাঁড়ায় $y = mx + c$.

(ii) যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1$ এবং $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = c_1$ হয় তবে $y = m_1 x + c_1$ একটি তির্যক অভিসারক হবে।

(iii) যদি $y = f(x)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে $\lim_{x \to -\infty} f(x)/x = m_2$ এবং $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = c_2$ হয়, তবে $y = m_2 x + c_2$ একটি তির্যক অভিসারক হবে।

উদাহরণ 1. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ বক্ররেখার অভিসারগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে স্পষ্টতই দেখা যায় যে যখন $x \to \pm 1$, তখন $y \to \infty$ সুতরাং $x = \pm 1$ দুইটি উল্লম্ব অভিসারক।

এখন তির্যক অভিসারকের জন্য আমরা লক্ষ্য করি

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1.$$

$$\text{এবং } c_1 = \lim_{x\to+\infty} (y-x)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0\,;$$

অতএব $y = x$ একটির অভিসারক।

অনুরূপভাবে যখন $x \to -\infty$ তখন লক্ষ্য করি $m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = -1$,

$$c_2 = \lim_{x\to-\infty} (x+y) = 0$$

অতএব $y = -x$, একটি অভিসারক।

উদাহরণ 2. $y = a \log \sec\left(\frac{x}{a}\right)$ বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান: Y অক্ষের অসমান্তরাল বা তির্যক অভিসারকগুলি বাহির করতে হলে আমরা জানি $y = mx + c$ সরলরেখাটি একটি অভিসারক হবে যদি,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} \quad \text{এবং } c = \lim_{x\to\infty} (y - mx) \text{ সান্ত হয়।}$$

এখন এক্ষেত্রে $\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a \log \sec (x/a)}{x}$

কিন্তু এই সীমাটির অস্তিত্ব নাই। অতএব এক্ষেত্রে বক্ররেখাটির Y অক্ষের অসমান্তরাল বা তির্যক কোন অভিসারিক নাই। এখন Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারক নির্ণয় করার সময় আমরা দেখি যে, $y = a \log \sec\left(\frac{x}{a}\right) \to \infty$, যখন $\frac{x}{a} \to 2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots)$

অতএব Y অক্ষের সমান্তরাল অভিসারকের সমীকরণগুলি

$$x = \left(2n\pi \pm \frac{1}{2}\pi\right)a, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots)$$

12.06 f(x, y) = 0 এই সাধারণ বীজগাণিতিক বক্ররেখাটির Y অক্ষের অসমান্তরাল অভিসারক নির্ণয় :—

মনে করি, n ঘাত বিশিষ্ট একটি বীজগণিতীয় বক্ররেখার সমীকরণ নিম্নরূপ

$$(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + a_2 y^{n-2} x^2 + a^3 y^{n-3} x^3 + \cdots\cdots$$

$$+ a_{n-1} y x^{n-1} + a_n x^n) + (b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} x + \cdots\cdots$$

$$+ b_{n-1} y x^{n-2} + b_n x^{n-1}) + \cdots + (l_{n-1} y + l_n x) + k_n = 0,$$

সমীকরণটিকে লেখা যেতে পারে

$$x^n\psi_n\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}\psi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\cdots+x\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\psi_0\left(\frac{y}{x}\right)=0 \quad \text{(A)}$$

যেখানে ψ_r একটি r ঘাতের বীজগাণিতিক বহুপদবিশিষ্ট রাশিমালা।

সমীকরণ (A)-কে x^n দ্বারা ভাগ করে যদি মনে করা হয় $|x| \to \infty$ এবং ধরা যায় যে $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{y}{x}=m$, তখন সেই অবস্থায় পাওয়া যায় $\psi_n(m)=0$।

এখন বক্ররেখার বিভিন্ন শাখার সাপেক্ষে বিভিন্ন নতিগুলি নির্ণয় করতে হবে।

মনে করি $y-m'x=k'$, এবং যখন $|x|\to\infty$, $k'\to c'$। এখন আমরা $\frac{y}{x}$ কে $m'+\frac{k'}{x}$ রূপেও লিখতে পারি, অতএব $\frac{y}{x}$ এর মান সমীকরণ (A)-তে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$x_n\psi_n\left(m'+\frac{k'}{x}\right)+x^{n-1}\psi_{n-1}\left(m'+\frac{k'}{x}\right)+\cdots\cdots$$
$$+x\psi_1\left(m'+\frac{k'}{x}\right)=0$$

আবার টেলরের উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা লিখতে পারি,

$$x^n\left[\psi_n(m')+\frac{k'}{x}\psi'_n(m')+\frac{k'^2}{2x^2}\psi_n''(m')+\cdots\cdots\right.$$
$$\cdots\cdots+x^{n-1}\left[\psi_{n-1}(m')+\frac{k'}{x}\psi'_{n-1}(m')+\frac{k'^2}{2x^2}\psi''_{n-1}(m')\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots\cdots=0$$

এখন উপরোক্ত সমীকরণটি থেকে x এর ঘাতগুলিকে অবরোহীক্রমে লিখে পাওয়া যায় $x_n\psi_n(m')+x^{n-1}[k'\psi_n'(m')+\psi_{n-1}(m')]$

$$+x^{n-2}\left[\frac{(k')^2}{2}\psi_n''(m')+k'\psi'_{n-1}(m')+\psi_{n-2}(m')\right]$$
$$+\cdots\cdots\quad\cdots\quad=0\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \quad \text{(B)}$$

আবার যেহেতু আমরা জানি $\psi_n(m')=0$, অতএব উপরের সমীকরণটিকে x^{n-1} দ্বারা ভাগ করে এবং $|x|\to\infty$ ($k'=c'$ ধরে) আমরা পাই

$$c'\psi_n'(m')+\psi_{n-1}(m')=0$$

বা $$c'=-\frac{\psi_{n-1}(m')}{\psi_n'(m')};\ \{\psi_n'(m')\neq 0\}.$$

সুতরাং $y=m'x+c'$ বা $y=m'x-\dfrac{\psi_{n-1}(m')}{\psi_n'(m')}$.

এই সরলরেখাটি m' এই নতিটির (slope) সাপেক্ষে একটি অভিসারক যখন $\psi'_n(m')\neq 0$

অনুরূপভাবে m'', m'''……অর্থাৎ $\psi_n'(m)=0$ এই সমীকরণের বীজগুলির সাপেক্ষে অভিসারকগুলি হল যথাক্রমে

$$y=m''x-\frac{\psi_{n-1}(m'')}{\psi'_n(m'')},\quad \{\psi_n'(m'')\neq 0\}$$

এবং $y=m'''x-\dfrac{\psi_{n-1}(m''')}{\psi_n'(m''')}$, $\{\psi_n'(m''')\neq 0\}$ প্রভৃতি

বিশেষ অবস্থা : যদি m এর একটি মান যাহা $\psi_n(m)=0$ কে সিদ্ধ করে যেমন $m=m'$ এবং $\psi_n'(m)=0$ হয় ও এই মানের জন্য $\psi_{n-1}(m)\neq 0$ হয়, যখন $c\to\infty$ হয়। অতএব m এর এই নির্দিষ্ট মানটির জন্য বক্ররেখাটির কোন অভিসারক থাকে না।

আবার যদি $\psi_n'(m)=\psi_{n-1}(m')=0$ হয়, তবে

$$c_1\psi_n'(m')+\psi_{n-1}(m')=0$$

এই সমীকরণটি একটি অভেদে পরিবর্তিত হয় এবং তখন সমীকরণ (B) x^{n-2} দ্বারা অনুবদ্ধ হয়।

আবার সমীকরণ (B)-কে এখন x^{n-2} দ্বারা ভাগ করে এবং $x\to\infty$ এবং $\lim k'=c'$ ধরে পাই

$$\left\{\frac{c'^2}{2}\right\}\psi_n''(m')+c'\cdot\psi'_{n-1}(m')+\psi_{n-2}(m')=0$$

এখন c' এর জন্য দুটি মান পাওয়া যায় যখন $\psi_n''(m')\neq 0$

ধরা যাক এই মান দুইটি c_1' এবং c_2'। অতএব সাধারণভাবে আমরা দুটি সমান্তরাল অভিসারক পাই, যথা $y=m'x+c_1'$ এবং $y=m'x+c_2'$

কার্যকরী নীতি : যদি $f(x,y)=x^n\psi_n\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{n-1}\psi_{n-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $+x^{n-2}\psi_{n-2}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\cdots\cdots=0$ একটি n ঘাতবিশিষ্ট বক্ররেখার সমীকরণ হয় তবে y অক্ষের অসমান্তরাল অভিসারকগুলি নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত পন্থাগুলি অবলম্বন করতে হবে।

(ক) প্রথমে অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারকগুলি 12.04 অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়মগুলির দ্বারা নির্ণয় করতে হবে।

(খ) এবার $x^n\psi_n(y/x)$ এ $x=1$ এবং $y=m$ বসিয়ে $\psi_n(m)$ বাহির করতে হবে। এক্ষেত্রে মনে করতে হবে $\psi_n(m)=0$ এবং $m=m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots m_n$ এবার এই অবস্থায় $\psi'_n(m)$ নির্ণয় করতে হবে।

(গ) এখন $x^{n-1}\psi_{n-1}(y/x)$ এ $x=1$, $y=m$ বসিয়ে $\psi_{n-1}(m)$ নির্ণয় করতে হবে।

(ঘ) পরে $m=m_1$ এর জন্য $c=c_1=-\dfrac{\psi_{n-1}(m_1)}{\psi_n'(m_1)}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে, যেখানে $\psi_n'(m_1)\neq 0$.

অতএব বলা যায় এখন $y=m_1x+c_1$ একটি অভিসারক, অনুরূপভাবে $m=m_2$, m_3 প্রভৃতির সাপেক্ষে অভিসারকগুলি নির্ণয় করতে হবে।

(ঙ) যদি m এর কোন একটি মানের জন্য $\psi_n'(m)=0$ হয়, তবে সমান্তরাল অভিসারক নির্ণয় করার জন্য অগ্রসর হতে হবে।

উদাহরণ 1. $x^3+x^2y-xy^2-y^3+x^2-y^2=2$ এই বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে x^3 এবং y^3 এর সহগগুলি ধ্রুবক হওয়ায় বক্ররেখাটির কোনও উল্লম্ব বা অনুভূমিক অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারক নাই। এখন

$$(x^3+x^2y-xy^2-y^3)$$

এই রাশিটিতে $x=1$, এবং $y=m$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\psi_3(m)=1+m-m^2-m^3$$

$$\therefore\quad \psi_3'(m)=1-2m-3m^2$$

এখন যদি $\psi_3'(m)=0$ হয় তবে, $m=1,\ -1,\ -1.$

আবার দ্বিঘাত বিশিষ্ট পদগুলি (x^2-y^2) এর জন্য $x=1$, এবং $y=m$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\psi_2(m)=1-m^2.$$

এখন $m=1$ হলে $c=-\dfrac{\psi_2(1)}{\psi_3'(1)}=0$

$\therefore$ অভিসারকের সমীকরণ $y=mx+c=1\cdot x+0=x$

অর্থাৎ $y=x$

আবার যেহেতু $\psi'_3(-1)=0$, আমরা সমান্তরাল অভিসারকগুলি সম্বন্ধে এখন আলোচনা করব। নিম্নলিখিত সমীকরণটি থেকে c এর মান পাওয়া যাবে।

$$\frac{c^2}{2}\psi''_3(-1)+c\psi'_2(-1)+\psi_1(-1)=0$$

$$\therefore\quad \frac{c^2}{2}\cdot 4+c\cdot 2+0=0 \qquad \left[\because\ \begin{array}{l}\psi''_3(m)=-2-6m\\ \text{এবং } \psi'_2(m)=-2m\end{array}\right]$$

বা, $2c^2+2c=0$

বা, $2c(c+1)=0 \qquad \therefore\quad c=0,\ -1$

সুতরাং দুইটি সমান্তরাল অভিসারক $y=-x$ এবং $y=-x-1$

অতএব বক্ররেখাটির নির্ণেয় অভিসারকগুলি হবে $y=x$, $y=-x$, $y=-x-1$.

উদাহরণ 2. $x^3-2y^3+xy(2x-y)+y(x-y)+1=0$ এই বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে যেহেতু x^3 এবং y^3 পদ দুটির সহগগুলি ধ্রুবক অতএব ইহার কোন অনুভূমিক বা উল্লম্ব অভিসারক নাই। অতএব এখন $y=mx+c$ আকারের তির্যক অভিসারিকগুলি নির্ণয় করতে হবে। প্রথমে ত্রিঘাতবিশিষ্ট পদগুলিতে $x=1$ এবং $y=m$ বসিয়ে পাওয়া যায় $\psi_n(m)=1-2m^3+m(2-m)$ $=(1-m)(1+m)(2m+1)$

এখন দ্বিঘাতবিশিষ্ট রাশিমালা $y(x-y)$তে $x=1$, এবং $y=m$ বসিয়ে পাই, $\psi_{n-1}(m)=m(1-m)$, এখন $\psi_n(m)=0$ হলে $m=1,\ -1,\ -\frac{1}{2}$ হয়, আবার

$$c=-\frac{\psi_{n-1}(m)}{\psi'_n(m)}=\frac{m(m-1)}{-6m^2+2-2m}$$

এখন $m=1$ হলে, $c_1=0$ ও $m=-1$ হলে $c_2=-1$ এবং $m=-\frac{1}{2}$ হলে, $c_3=\frac{1}{2}$ হয়। সুতরাং নির্ণেয় অভিসারকগুলি হবে, $y=x$, $y=-x-1$ এবং $y=-\frac{1}{2}(x-1)$

অর্থাৎ $x-y=0$, $x+y+1=0$ এবং $x+2y=1$ নির্ণেয় অভিসারকত্রয়।

12.07 বীজগাণিতিক বক্ররেখাগুলির অভিসারক বাহির করার একটি প্রয়োজনীয় বিকল্প পদ্ধতি :

ধরা যাক কোন একটি বক্ররেখার বীজগাণিতিক সমীকরণ,

$$P_n+P_{n-1}+P_{n-2}+\cdots\cdots=0\cdots\cdots(A)$$

যেখানে $P_n[\equiv a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n = x^n\psi_n(y/x)]$ n-ঘাত বিশিষ্ট সমমাত্রিক (homogeneous) পদ, P_{n-1} একটি $(n-1)$ ঘাত বিশিষ্ট সমমাত্রিক পদ এবং এইভাবে পরপর আমরা লিখতে পারি।

এখন যদি m_1, m_2, m_3 $\cdots$ প্রভৃতি $\psi_n(m)=0$ এর বিভিন্ন বীজ হয় তবে সমীকরণ তত্ত্ব থেকে আমরা বলতে পারি যে, $m-m_1$, $m-m_2$ প্রভৃতি $\psi_n(m)$এর এক একটি উৎপাদক ; তাহলে $P_n \equiv a_n(y-m_1x)(y-m_2x)\cdots\cdots$

অতএব এখন $y-m_1x=0$, $y-m_2x=0$ প্রভৃতির সমান্তরাল সম্ভাব্য অভিসারকগুলি যথাক্রমে 12.04 এবং 12.08 অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রণালী দ্বারা নির্ণয় করা যেতে পারে।

অবস্থা I. মনে করা যাক যে, $y-m_1x$ রাশিটি P_n এর একটি অনাবৃত্ত (non-repeated) উৎপাদক, অতএব এখন সমীকরণ (A) কে লেখা যেতে পারে,

$$(y-m_1x)\,Q_{n-1}+F_{n-1}=0$$

$$\text{বা,}\quad y-m_1x+\frac{F_{n-1}}{Q_{n-1}}=0 \quad \cdots\cdots(B)$$

এখানে $Q_{n-1}[=(y-m_2x)(y-m_3x)\cdots\cdots]$, একটি $(n-1)$ ঘাত বিশিষ্ট সমমাত্রিক রাশিমালা যাতে $(y-m_1x)$ উৎপাদকটি অনুপস্থিত। আবার $F_{n-1}[\equiv P_{n-1}+P_{n-2}+\cdots]$ $(n-1)$ তম এবং নিম্নতর ঘাতযুক্ত পদসমষ্টি।

এখন 12.06 অনুচ্ছেদটি থেকে আমরা লিখতে পারি যে, $y-m_1x=c_1$ একটি $y-m_1x=0$ এর সমান্তরাল অভিসারক যখন $c_1=\lim\limits_{x\to\infty}(y-m_1x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-F_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

এবং $m_1=\lim\limits_{x\to\infty}(y/x)$

অতএব অভিসারক হল, $y-m_1x+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F_{n-1}}{Q_{n-1}}=0$

এখন উপরের সীমাগুলির মান নির্ণয় করতে হলে, $y=m_1x$ বসিয়ে $x\to\infty$ ধরতে হবে।

অবস্থা II ধরা যাক $(y-m_r\,x)$, P_n এর একটি আবৃত্ত (repeated) উৎপাদক। অতএব সমীকরণ (A) থেকে পাওয়া যায়

$$(y-m_rx)^2\,Q_{n-2}+P_{n-1}+F_{n-2}=0 \quad \cdots \quad \cdots(C)$$

যেখানে Q_{n-2} একটি $(n-2)$ ঘাত বিশিষ্ট সমমাত্রিক পদ এবং F_{n-2} $(=P_{n-2}+P_{n-3}+\cdots)$, $(n-2)$ তম পদ এবং নিম্নতর ঘাতযুক্ত পদসমূহের দ্বারা গঠিত।

এখন উপরোক্ত পদ্ধতি অনুসারে $y-m_r x=0$ এর সমান্তরাল অভিসারকের সমীকরণ হবে $y-m_r x=c_r$, যখন

$$c_r=\lim_{x\to\infty}(y-m_r x) \text{ এবং}$$

$$m_r=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$$

সুতরাং সমীকরণ (C) থেকে অভিসারকের সমীকরণ লেখা যায়,

$$c_r^2+\lim_{x\to\infty}\frac{P_{n-1}+F_{n-2}}{Q_{n-2}}=0$$

আবার যদি $(y-m_r x)$, P_{n-1} এর কোন উৎপাদক না হয় তবে ইহা লক্ষ্যনীয় যে $c^2{}_r$ একটি সীমার দিকে অগ্রসর হয় না, অতএব $y=m_r x$ এর সমান্তরাল কোন অভিসারক নাই।

অপরপক্ষে, যদি P_{n-1} এর একটি উৎপাদক $y-m_r x$ হয় এবং $P_{n-1}=(y-m_r x)\,R_{n-2}$ হয়, তবে আমরা সমীকরণ (C) থেকে পাই

$$(y-m_r x)^2+(y-m_r x)\,\frac{R_{n-2}}{Q_{n-2}}+\frac{F_{n-2}}{Q_{n-2}}=0$$

অতএব পূর্ব্বের আলোচনা মত অভিসারকগুলি হবে,

$$(y-m_r x)^2+(y-m_r x)\lim_{x\to\infty}\frac{R_{n-2}}{Q_{n-2}}+\lim_{x\to\infty}\frac{F_{n-2}}{Q_{n-2}}=0$$

এখানে মনে রাখা উচিত যে সীমা বাহির করার সময়

$$m_r=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ ধরতে হবে।}$$

এইভাবে দেখা যায় P_n এর দুইটি আবৃত্ত উৎপাদকের জন্য দুইটি অভিসারক আছে।

অনুরূপভাবে আমরা P_n এর দুই বা ততোধিক আবৃত্ত উৎপাদকের সাপেক্ষে অভিসারকগুলি নির্ণয় করতে পারি।

বিঃ দ্রঃ (i) যদি অবস্থা (1) এর ক্ষেত্রে $(y-m_1 x)$ এর পরিবর্তে $(ax+by+c)$ একটি উৎপাদক হয়, তখন বক্ররেখার সমীকরণ হয়

$(ax+by+c)\ F_{n-1}+P_{n-1}=0$, এখন প্রমাণ করা যায় যে $(ax+by+c)$ এর সাপেক্ষে অভিসারক হবে, $(ax+by+c)+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_{n-1}}{F_{n-1}}=0$,

যখন $\lim\limits_{x\to\infty} y/x=-\dfrac{a}{b}$

(*ii*) y অক্ষের সমান্তরাল ভিন্ন অভিসারকগুলির নতি $\psi_n\ (m)=0$, এর বীজগুলির (যাহাদের সংখ্যা n এর বেশী নয়) থেকে পাওয়া যায়। অতএব আমরা m এর অধিকপক্ষে n মান পেতে পারি যার দ্বারা অভিসারকগুলির নতি (slope) সকল পাওয়া যায়। আবার $c\psi'_n\ (m)+\psi_{n-1}\ (m)=0$ এই সমীকরণটির থেকে m এর প্রত্যেক মানের জন্য, c এর একটিমাত্র মান পাওয়া যায়। অতএব n ঘাত-বিশিষ্ট একটি বক্ররেখার অধিকপক্ষে n সংখ্যক অভিসারক থাকে।

কোন বিশেষ ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে কোন বক্ররেখার একাধিক y—অক্ষের সমান্তরাল অভিসারক আছে তবে সে ক্ষেত্রে প্রমান করে দেখান যেতে পারে যে $\psi_n(m)=0$ এর ঘাত n অপেক্ষা সেই সংখ্যা কম হবে। এখন ইহা লক্ষ্য করার বিষয় যে, কোন একটি বক্ররেখার n অপেক্ষা বেশী অভিসারক থাকতে পারে না। কারণ এমনকি সমান্তরাল অভিসারকের ক্ষেত্রে c নির্ণায় সমীকরণটি দ্বিঘাত হয়। তখন $\psi_2(m)=0$ এই সমীকরণটির ক্ষেত্রে আমরা m এর দুইটি সমান মান পাই ; সুতরাং দুই সমান বীজ সাপেক্ষে দুটি এবং $(n-2)$ সংখ্যক অপর অভিসারক পাওয়া যায়, আবার যদি c নির্ণায় সমীকরণটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ হয়, সেক্ষেত্রে দেখান যেতে পারে যে, $\psi_n(m)$ এর তিনটি সমান বীজ থাকে। এইভাবে আমরা অপরাপর অবস্থাগুলিকে দেখতে পারি।

অতএব আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, n ঘাতের কোন একটি বক্ররেখার n সংখ্যক অভিসারক থাকতে পারে, কিন্তু কখনই n এর বেশী সংখ্যক অভিসারক থাকা সম্ভব নয়।

12.08. পর্যবেক্ষণ দ্বারা অভিসারক নির্ণয়

যদি কোন বক্ররেখার সমীকরণ $F_n+F_{n-2}=0$ এই আকারে দেওয়া থাকে, যেখানে F_n এবং F_{n-2} যথাক্রমে n এবং $(n-2)$ ঘাতের বহুপদী রাশিমালা, আবার যখন F_n কে n সংখ্যার রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভবপর হয়, যাতে উহা যখন শূন্যের সহিত সমান করা হয়, তখন n সংখ্যক এমন সরলরেখা পাওয়া যায় যাদের কোন দুইটি সরলরেখাই পরস্পর সমান্তরাল নয় ; তখন এই অবস্থায় পর্যবেক্ষণ দ্বারা বলা যায় যে বক্ররেখার অভিসারকগুলি হবে $F_n=0$.

12.09 কার্যকরী নীতি ঃ n তম ঘাতের বীজগাণিতক বক্ররেখার অভিসারকগুলি নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত নিয়মগুলি পরপর ব্যবহার করা সুবিধাজনক হয়। যেমন ঃ

যদি দেখা যায় বক্ররেখার ঘাত n, তবে বলা যেতে পারে যে, ঐ বক্ররেখাটির সম্ভব হলে nসংখ্যক অভিসারক থাকতে পারে।

এরপর অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল অভিসারকগুলি নির্ণয় করার জন্য 12.04 অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়মগুলি ব্যবহার করতে হবে।

এখন উচ্চতম ঘাতযুক্ত পদগুলিকে বাস্তব রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে।

যদি $(y-m_1x)^2$ বা $(ax+by+c)^2$, n তম ঘাতের একটি উৎপাদক হয় তখন সেখানে সমান্তরাল অভিসারক থাকতেও পারে, আবার নাও থাকতে পারে। যদি $(y-m_1x)$, $(n-1)$ তম ঘাতযুক্ত পদের একটি উৎপাদক হয়, তবে সেখানে সমান্তরাল অভিসারক পাওয়া যেতে পারে, অন্যথায় সমান্তরাল অভিসারক পাওয়া সম্ভব নয়।

যদি, সমান্তরাল অভিসারিকগুলি $(y-m_1x)^3$ এই উৎপাদকটির সাপেক্ষে পাওয়া যায়, তবে $(y-m_1x)^2$ কে $(n-1)$ তম ঘাতযুক্ত পদের একটি উৎপাদকরূপে অবশ্যই পাওয়া যাবে এবং $(n-2)$ তম ঘার্তবিশিষ্ট পদের $(y-m_1x)$ একটি উৎপাদক হবে, এইভাবে পরপর $(y-m_1x)$ এর উচ্চতম ঘাতগুলির জন্যই একই উপায় অবলম্বন করা যাবে।

উদাহরণ 1.

$$y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3-3y^2+9xy-6x^2-2y-2x+1=0$$

এই বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি বাহির কর।

সমাধান ঃ এখানে দেওয়া আছে,

$$(y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3)-3y^2+9xy-6x^2-2y-2x+1=0$$

এখান থেকে পাওয়া যায় $y^3-5xy^2+8x^2y-4x^3$

$$=(y-x)(y^2-4xy+4x^2)$$

$$=(y-x)(y-2x)^2$$

সুতরাং বক্ররেখাটির সমীকরণটিকে লেখা যেতে পারে,

$$(y-x)(y-2x)^2-3y^2+9xy-6x^2-2y-2x+1$$

এখন মনে করি $y-x=A \quad \therefore \quad y=A+x.$

এখন y এর মান বক্ররেখার সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$A(A-x)^2-3(x+A)^2+9x(x+A)-6x^2-2(x+A)$$
$$-2x+1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(1) নং সমীকরণের x^2 এর সহগ শূন্যের সমান করলে পাওয়া যায়

$$A-3+9-6, \quad \text{বা} \quad A=0$$

$\therefore$ অভিসারক হল $y-x=0$

আবার বক্ররেখার সমীকরণটিতে $y-2x=A$, বসিয়ে পাই

$$(x+A)A^2-3(2x+A)^2+9x(2x+A)-6x^2+2(x+A)$$
$$-2x+1=0$$

এখন উপরের সমীকরণটি থেকে x এর সহগ শূন্যের সমান করলে হয়

$$A^2-3A+2=0, \quad \text{বা} \quad (A-1)(A-2)=0$$

$\therefore \quad A=1,\ 2.$

সুতরাং অভিসারকগুলি হবে $y-2x=1$ এবং $y-2x=2.$

অতএব নির্ণেয় অভিসারকগুলি $y=x,\quad y=2x+1,\quad y=2x+2$

উদাহরণ 2. দেখাও যে $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$ বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি এমন একটি বর্গক্ষেত্র সৃষ্টি করে যার বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$.

সমাধান: $x^2y^2=a^2\ (x^2+y^2)$ এই সমীকরণটিকে লেখা যেতে পারে,

$$x^2y^2-a^2x^2-a^2y^2=0$$

বা $x^2(y^2-a^2)-a^2y^2=0$ বা $x^2(y+a)(y-a)-a^2y^2=0$

$\therefore$ এখানে পর্যবেক্ষণ দ্বারা অভিসারকদ্বয় পাওয়া যায়,

$$y=a,\ y=-a \quad \text{বা} \quad y=\pm a$$

আবার উপরোক্ত বক্ররেখাটির সমীকরণকে নিম্নলিখিতভাবে লিখে পাওয়া যায়

$$y^2(x^2-a^2)-a^2x^2=0$$

বা $y^2(x+a)(x-a)-a^2x^2=0$

$\therefore$ এখান থেকে পর্যবেক্ষণ দ্বারা অভিসারকগুলি পাওয়া যায়

$$x=-a,\ x=a \quad \text{বা} \quad x=\pm a.$$

অতএব এখান থেকে সহজেই দেখা যায় আলোচ্য বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি এমন একটি বর্গক্ষেত্র সৃষ্টি করে, যাদের কৌণিক বিন্দুগুলি যথাক্রমে $(a,\ a)$, $(-a,\ a)$, $(-a,\ -a)$ এবং $(a,\ -a)$ অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$.

12.10 ধ্রুবীয় (Polar) বক্ররেখাগুলির অভিসারক নির্ণয়

মনে করি $r = f(\theta)$ কোন একটি বক্ররেখার ধ্রুবীয় সমীকরণ, যাকে লেখা যেতে পারে,

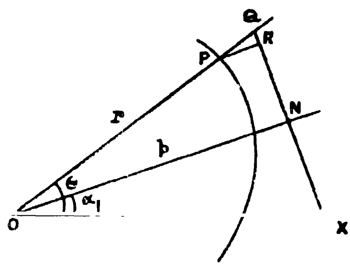
$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{f(\theta)} = \phi(\theta) \quad (\text{ মনে করি }) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

মনে করি P, বক্ররেখাটির অভিসারকের উপর যে কোন বিন্দু, যার স্থানাংক (r, θ), যখন $P \to \infty$, $r \to \infty$ অর্থাৎ $\phi(\theta) \to 0$. এখন মনে করি $\phi(\theta) = 0$ এই সমীকরণের বীজগুলি, $\theta = \alpha, \beta, \gamma, \cdots \cdots$ প্রভৃতি ; এখন বক্ররেখাটির $\theta = \alpha$ এর সাপেক্ষে যে কোন একটি শাখার জন্য মনে করি,

$$r \cos(\theta - \alpha_1) = p \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এই সরলরেখাটি ঐ শাখার একটি অভিসারক।

এখন $p = ON$, মূলবিন্দু '0' থেকে সরলরেখাটির উপর লম্ব এবং $\angle NOX = \alpha_1$; মনে করি, OP এর বিস্তৃত অংশ অভিসারককে Q বিন্দুতে ছেদ করে। মনে কর P বিন্দু হইতে সরলরেখাটির উপর লম্ব PR



$$PR = PQ \cos QPR$$
$$= (OQ - OP) \cos QON$$
$$= \{ p \sec(\theta - \alpha_1) - f(\theta) \} \cos(\theta - \alpha_1)$$
$$= p - f(\theta) \cos(\theta - \alpha_1)$$

এখন যেহেতু $r \cos(\theta - \alpha_1) = p$ একটি অভিসারক অতএব $PR \to 0$, যখন $P \to \infty$ অর্থাৎ আলোচ্য শাখাটির জন্য $\theta \to \alpha$.

$$\therefore \lim_{\theta \to \alpha_1} \{ p - f(\theta) \cos(\theta - \alpha_1) \} = 0$$

বা $$\lim_{\theta \to \alpha_1} f(\theta) \cos(\theta - \alpha_1) = p$$

এবং যেহেতু p সান্ত এবং $f(\theta) \to \infty$ যখন $\theta \to \alpha$, অতএব

$$\lim_{\theta \to \alpha_1} \cos(\theta - \alpha_1) = 0$$

$$\therefore \quad \alpha - \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{বা} \quad \alpha_1 = \alpha - \pi/2$$

আবার $p = \lim_{\theta \to \alpha} f(\theta)\cos(\theta - \alpha_1) = \lim_{\theta \to \alpha} \frac{-\sin(\theta - \alpha)}{\phi(\theta)}$

[এখানে দেখা যায় সীমাটি $\frac{0}{0}$ আকারের]

$$= \lim_{\theta \to \alpha} \frac{-\cos(\theta - \alpha)}{\phi'(\theta)}$$

$$= -\frac{1}{\phi'(\alpha)}.$$

সুতরাং এখন $r\cos(\theta - \alpha_1) = p$ এই সমীকরণটিকে পরিবর্তিত আকারে এইভাবে দেখান যায়,

$$r\cos(\theta - \alpha + \pi/2) = -\frac{1}{\phi'(\alpha)}$$

অথবা $r\sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{\phi'(\alpha)}$, ইহাই নির্ণেয় অভিসারক।

এইভাবে বক্ররেখার বিভিন্ন শাখাগুলির সাপেক্ষে সম্ভবপর অভিসারকগুলি হবে

$$r\sin(\theta - \beta) = \frac{1}{\phi'(\beta)}, \quad r\sin(\theta - \gamma) = \frac{1}{\phi'(\gamma)} \quad \cdots\cdots \text{ প্রভৃতি।}$$

কার্যকরী নিয়ম : (1) প্রদত্ত সমীকরণে $r = \frac{1}{u}$ বসাও, (2) $u = 0$ জন্য θএর মানগুলি নির্ণয় কর (মনে কর একটি মান θ_1), (3) $\lim_{\substack{u \to 0 \\ \theta \to \theta_1}} \left(\frac{d\theta}{du}\right)$ নির্ণয় কর এবং মনে কর এই সীমা $= l$, (4) $r\sin(\theta_1 - \theta) = l$ একটি অভিসারক।

উদাহরণ 1. $r\sin 2\theta = a\cos 3\theta$ এর যে কোন একটি অভিসারক নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে $\sin 2\theta = \frac{a}{r}\cos 3\theta = au\cos 3\theta \quad \cdots \quad (1)$

$$\therefore \quad u = 0 \text{ যখন } \sin 2\theta = 0$$

$$\text{বা} \quad 2\theta = n\pi \quad \therefore \quad \theta = \frac{n\pi}{2}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

এখন (1) এর সমীকরণের উভয়দিকে θ এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর হয়

$$2\cos 2\theta = a\frac{du}{d\theta}\cdot \cos 3\theta - 3au\sin 3\theta$$

$$\therefore\ \frac{d\theta}{du}=\frac{a\cos 3\theta}{2\cos 2\theta+3au\sin 3\theta}$$

আবার $u=0$ এবং $\theta=0$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\left(\frac{-d\theta}{du}\right)_{\theta=0}=\frac{-a}{2}$$

অতএব যখন $\theta=0$, তখন অভিসারকের সমীকরণ,

$$r\sin(0-\theta)=\frac{-a}{2},\ \text{বা}\ r\sin\theta=\frac{a}{2}.$$

উদাহরণ 2, $r^n \sin n\theta = a^n\ (n>1)$ এই ধ্রুবীয় বক্ররেখাটির অভিসারক নির্ণয় কর :

সমাধান : এখানে দেওয়া আছে

$$r^n\sin n\theta = a^n$$

$$\therefore\ \sin n\theta=\left(\frac{a}{r}\right)^n=a^nu^n\ \left[\because\ u=\frac{1}{r}\right]$$

$$\therefore\ u=0\ \text{যখন}\ \sin n\theta=0$$

$$\therefore\ n\theta=k\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{k\pi}{n}=\alpha\ (\text{মনে করি})$$

আবার যেহেতু $u^n=\frac{\sin n\theta}{a^n}$ উভয় দিকের লগারিদম নিলে হয়

$$n\log u=\log\sin n\theta-\log(a^n)$$

এখন অন্তরকলন করে পাওয়া যায়,

$$n\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{d\theta}=n\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}-n\cot n\theta$$

$$\therefore\ \frac{du}{d\theta}=u\cot n\theta=\frac{\sin^{\frac{1}{n}} n\theta}{a}\cdot\frac{\cos n\theta}{\sin n\theta}$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\cos n\theta}{\sin^{1-\frac{1}{n}} n\theta}\to\frac{1}{a}\frac{\cos\left(n\cdot\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^{1-\frac{1}{n}} n\cdot\frac{k\pi}{n}}\to\infty$$

যখন $\theta \to \frac{k\pi}{n}$.

$$\therefore \frac{d\theta}{du} = 0$$

সুতরাং নির্ণেয় অভিসারকটি হল,

$$\sin(\theta - \alpha) = 0, \quad \text{বা} \quad \theta = \alpha = \frac{k\pi}{n}.$$

বিবিধ অনুশীলনী 12

1. দেখাও যে $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ বক্ররেখাটির উল্লম্ব অভিসারক $x = 0$, এই সরলরেখা।

   এখন দেখাও যে $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y/x = 1$ এবং $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [y - x] = 2$;

   উপরোক্ত সীমা থেকে ব্যাখ্যা কর $y = x + 2$ সরলরেখা বক্ররেখার একটি অভিসারক।

2. দেখাও যে $y = x + \log_x$ বক্ররেখার $x = 0$ একটি উল্লম্ব অভিসারক। পুনরায় প্রমাণ কর বক্ররেখার কোন তির্যক অভিসারক নাই।

3. দেখাও যে $y = e^{-x} \sin x + x$ বক্ররেখার কোন উল্লম্ব অভিসারক নাই। প্রমাণ $\lim\limits_{x \to +\infty} y/x = 1$ এবং $\lim\limits_{x \to +\infty} [y - x] = 0$

   এখন পরিষ্কারভাবে বুঝাও যে যখন $x \to +\infty$ তখন $y = x$ একটি অভিসারক।

4. দেখাও যে $y = x \log\left(e + \frac{1}{x}\right)$ বক্ররেখার $x = -\frac{1}{e}$ এবং $y = x + \frac{1}{e}$ দুইটি অভিসারক।

5. যদি একটি বক্ররেখা $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$ দ্বারা প্রকাশিত হয় তবে দেখাও যে $y = c$ একটি অনুভূমিক অভিসারক যখন $\phi(t_0) = \infty$ এবং $\psi(t_0) = c$ এবং $x = b$ একটি উল্লম্ব অভিসারক যখন $\psi(t_0) = \infty$ এবং $\phi(t_0) = b$.

   পুনরায় দেখাও যে $y = mx + c$ বক্ররেখার একটি অভিসারক যদি $\phi(t_0) = \psi(t_0) = \infty$ এবং

   $$\lim_{t \to t_0} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = m; \quad \lim_{t \to t_0} [\psi(t) - m\phi(t)] = c \text{ সিদ্ধ হয়।}$$

6. প্রমান কর $y = \pm\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ সরলরেখা দুইটি $x = \dfrac{2t}{1-t^2}$; $y = \dfrac{t^2}{1-t^2}$ বক্ররেখার অভিসারক।

7. দেখাও যে
$x^3 - 5xy^2 + 8x^2y^2 - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x = 1$
বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি $y = x$, $y = 2x+1$, $y = 2x+2$ হবে।

8. প্রমাণ কর $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ররেখার $x + y + a = 0$ এক অভিসারক।
[**সংকেত :** $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$]

9. দেখাও যে $4x^2y^2 - x^2 - x^2 = 0$ বক্ররেখার অভিসারকগুলি একটি বর্গক্ষেত্র সৃষ্টি করে।

10. প্রমাণ কর $r = \dfrac{a\theta^2}{\theta^2 - 1}$ বক্ররেখার অভিসারক দুটি $r\sin(\theta - 1) = \dfrac{a}{2}$ এবং $r\sin(\theta + 1) = -a/2$

11. দেখাও যে $x^2y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0$
বক্ররেখার অভিসারকগুলি নিম্নরূপ :
$x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$

12. দেখাও যে $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 + y^2)$ বক্ররেখাগুলির অভিসারকগুলি $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

13. দেখাও যে $(y - mx - c)\,P_{n-1} + P_{n-2} = 0$ আকারে প্রকাশিত বক্ররেখার $y = mx + c$ একটি অভিসারক হবে যদি P_{n-1} এবং P_{n-2} দুটি x-এর বহুপদ রাশি যথাক্রমে $(n-1)$ ঘাতের এবং $(n-2)$ ঘাতের হয় এবং $P_{n-1} = 0$ সমীকরণটির মধ্যে $y = mx$ এর সমান্তরাল সরলরেখা না থাকে।

14. প্রমাণ কর $(x+y)^2(x+2y+2) - (x+9y-2) = 0$ বক্ররেখার অভিসারকগুলি $x + y = \pm 2\sqrt{2}$ এবং $x + 2y + 2 = 0$.

15. স্থানাংক জ্যামিতির $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের অভিসারকের জ্যামিতিক সংজ্ঞা লেখ। এই ব্যাখ্যা অনুসারে নিম্নলিখিত বক্ররেখার অভিসারিকগুলি নির্ণয় করার সময় লক্ষ্য কর যে অভিসারকের সংখ্যা অনন্ত

$$(x+y)^2(x+2y+2) = x + 9y - 2.$$

তাহলে ঐ জ্যামিতিক সংজ্ঞা সম্বন্ধে তোমার মতামত কি ?

16. দেখাও যে $2x(y-3)^2 - 3y(x-1)^2 = 0$ বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

17. $r\theta = a$ বক্ররেখাটির অভিসারক নির্ণয় কর।

[উত্তর : $r \sin\theta = a$]

18. প্রমাণ কর $r \tan\theta = a$ বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি $r = a/n$ বৃত্তটির স্পর্শক।

19. প্রমাণ কর $y^2(a^2 + x^2) = x^2(a^2 - x^2)$ বক্ররেখাটির কোন অভিসারক নাই।

20. দেখাও যে $x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ বক্ররেখাটির অভিসারকগুলি বক্ররেখাটিকে যে তিনটি বিন্দুতে ছেদ করে সেই তিনটি বিন্দু $x + y = 0$ এই সরলরেখায় অবস্থিত।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

এনভেলপ বা মোড়ক

13.01 মনে করি, $(x-\theta)^2+y^2=a^2$ ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ. তাহলে এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে θ এর বিভিন্ন মানের জন্য উপরের সমীকরণটি থেকে বিভিন্ন বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যেতে পারে, কিন্তু ঐ বৃত্তগুলির প্রত্যেকটির মধ্যে একটা সাধারণ গুণ দেখা যাবে, যথা—প্রত্যেকটি বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ a ও উহাদের কেন্দ্রগুলো X অক্ষের উপর অবস্থিত। এখন θ এর বিভিন্ন মানের জন্য যে বিভিন্ন বৃত্তগুলি পাওয়া যাবে তাদের অর্থাৎ θ এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রাপ্ত বক্ররেখাগুলোকে এক কথায় বলা হবে একটা বক্ররেখা পরিবার (family of curves)। ওপরের সমীকরণের ক্ষেত্রে θ এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রাপ্ত বক্ররেখাগুলি যেহেতু বৃত্ত সেহেতু এক্ষেত্রে বলা যেতে পারে যে θ এর বিভিন্ন মানের জন্য একটা বৃত্তীয় পরিবার পাওয়া যায়। আবার θ এই রাশিটি, যাহা একটি বিশেষ বক্ররেখার জন্য ধ্রুবক এবং যাহা বক্ররেখা পরিবারের বিভিন্ন বক্ররেখার জন্য বিভিন্ন মান ধারণ করে তাকে অর্থাৎ θ এই রাশিটিকে বলা হবে ঐ বক্ররেখা পরিবারের একটি প্রমাত্রা (parameter)। এখানে ইহা লক্ষ্যণীয় যে এই বৃত্তীয় পরিবার $y=a$ এবং $y=-a$ এই দুইটি সরলরেখাকে স্পর্শ করে রয়েছে। এই ধারণা থেকেই বক্ররেখা পরিবারের এনভেলপের কথার আবির্ভাব হয়। অবার ঋজুরেখার ক্ষেত্রেও আমরা একই ভাবে বলতে পারি যে, $x\cos\theta+y\sin\theta=p$ এই ঋজুরেখাটির θ এর মান পরিবর্তন করলে θ এর বিভিন্ন মানের জন্য আমরা বিভিন্ন সরলরেখার সমীকরণ পাব, যাদের প্রত্যেকটির মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব p এবং এক্ষেত্রেও θ এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রাপ্ত সরলরেখাগুলিকে ঋজুরেখ পরিবার বলা হবে; θ এই রাশিটিকে ঐ পরিবারের একটি প্রমাত্রা বলে ধরা যাবে। এখন সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি যে, এক প্রমাত্রা বিশিষ্ট বক্ররেখীয় পরিবারের সমীকরণ,

$$f(x, y, \theta)=0$$

যেখানে 'θ' একটি প্রমাত্রিক রাশি।

13.02 মোড়কের সংজ্ঞা : যদি $Q=f(x, y, \alpha)=0$ এই বক্ররেখা পরিবারের প্রতিটি বক্ররেখা একটি স্থির বক্ররেখা P কে স্পর্শ করে তাহলে P বক্ররেখাটিকে বলা হয় Q বক্ররেখা পরিবারটির একটি এনভেলপ বা মোড়ক।

যেমন $(x-\theta)^2+y^2=a^2$ বৃত্তীয় পরিবারের মোড়ক $y=\pm a$ দুইটি সরলরেখা।

13.03 ঋজুরেখ পরিবারের মোড়কের সমীকরণ :

যদি $f(x, y, \alpha)=y-f(\alpha)x-\phi(\alpha)=0$ এই পরিবারের মোড়কটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হয়, তবে $f(x, y, \alpha)=0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha)=0$ এর মধ্যে α কে অপনয়ণ করতে হবে। আমরা পরিবারের সমীকরণ থেকে পাই

$$y=f(\alpha)x+\phi(\alpha) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(A)}$$

আবার, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$f'(\alpha)x+\phi'(\alpha)=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(B)}$$

বা, $x=-\frac{\phi'(\alpha)}{f'(\alpha)}=P(\alpha)$ [মনে করি] $\cdots \qquad \cdots \qquad$ (C)

এখন x এর উপরোক্ত মানটি সমীকরণ (A) তে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$y=\frac{-f(\alpha)\phi'(\alpha)}{f'(\alpha)}+\phi(\alpha) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(D)}$$

$=\frac{f'(\alpha)\phi(\alpha)-f(\alpha)\phi'(\alpha)}{f'(\alpha)}=Q(\alpha)$ [মনে করি]

$x=P(\alpha)$ এবং $y=Q(\alpha)$ সমীকরণদ্বয় $f(x, y, \alpha)=0$ এই বক্ররেখা পরিবারটির একটি মোড়ক। কারণ আমরা জানি যে, $x=P(\alpha), y=Q(\alpha)$ এই বক্ররেখার α বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণটি হয়,

$$y-Q(\alpha)=\frac{Q'(\alpha)}{P'(\alpha)}\,[x-P(\alpha)] \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(E)}$$

আবার সমীকরণ (C) ও (D) থেকে $P(\alpha)$, $Q(\alpha)$,এর মানগুলি সমীকরণ (E)তে প্রতিস্থাপিত করলে এবং $Q'(\alpha)/P'(\alpha)$ এর পরিবর্তে $f(\alpha)$ ধরে সরল করার পর, α বিন্দুতে $x=P(\alpha)$, $y=Q(\alpha)$ এই বক্ররেখার উপর স্পর্শকের সমীকরণটি পাওয়া যায় যে,

$$y=f(\alpha)x+\phi(\alpha),$$

অতএব দেখা গেল যে, ইহা প্রদত্ত ঋজুরেখ পরিবারের সমীকরণের সহিত অভিন্ন।

সুতরাং $f(x, y, \alpha)=0$ এই পরিবারের প্রতিটি রেখাই $f(x, y, \alpha)=0$ এবং $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ এর α অপনীয়ককে স্পর্শ করে। সংজ্ঞানুযায়ী বলা যেতে পারে যে,

$f(x, y, \alpha)=0$ এবং $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}=0$ এর মধ্যে α অপনয়ণ করায় প্রাপ্ত বক্ররেখা উপরোক্ত পাক্ষ্যরের একটি মোড়ক। এখন উপরের বিবৃতি হতে আমরা সহজে এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, প্রতিটি বক্ররেখা উহার স্পর্শক পরিবারের একটি মোড়ক।

উদাহরণ 1. $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ এই ঋজুরেখা পরিবারটির মোড়কের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন α একটি চল-প্রমাত্রা (Variable parametr) এবং A, B ও C তিনটি x এবং y এর রৈখিক ফাংশন।

সমাধান : এখানে আমাদের দেওয়া আছে,

$$A\alpha^2+B\alpha+C=0$$

অতএব α এর সাপেক্ষে উভয়দিকে অন্তরকলন করলে পাওয়া যায়,

$$2A\alpha+\mathrm{B}=0$$

$$\text{বা,} \quad \alpha=\frac{-B}{2A}$$

এখন α এর এই মান $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ এই সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$A.\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{2A}+C=0$$

$$\therefore \quad B^2=4AC$$

সুতরাং, $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ এই ঋজুরেখা পরিবারের মোড়কের সমীকরণ $B^2=4AC$.

উদাহরণ 2 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{c-a}=1$ ঋজুরেখা পরিবারেরর মোড়কের সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে a একটি প্রমাত্রা।

সমাধান : এখানে পরিবারটির সমীকরণ

$$a^2+a(y-x-c)+cx=0$$

অতএব উদাহরণ 1 এর সাহায্যে মোড়কের সমীকরণটি হবে

$$(y-x-c)^2=4cx.$$

অথবা $x^2+y^2+c^2=2xy+2cx+2cy$

অথবা $(x+y-c)^2=(-2\sqrt{xy})^2$

অথবা $x+y-c=-2\sqrt{xy}$

অথবা $x+y+2\sqrt{xy}=c$

অথবা $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{c})^2$

অথবা $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$.

[বিঃ দ্রঃ উপরোক্ত ক্ষেত্রে, $f(x, y, \alpha)=0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha)=0$ এই দুইটি সমীকরণের মধ্যে α কে অপনয়ণ করার পর x এবং y এর মধ্যে যে স্পর্শকটি পাওয়া গিয়াছে (α প্রমাত্রা) তাহা সবক্ষেত্রেই যে মোড়কের সমীকরণ হবে এ বিষয়ে কোন নিশ্চয়তা নাই, কারণ কোন কোন বিশেষক্ষেত্রে উপরোল্লিখিত সমীকরণটি অসাধারণ বিন্দুর (Singular points) সঞ্চারপথরূপেও (locus) দেখা দেয়]

অনুশীলনী

নিম্নলিখিত ঋজুরেখা পরিবারগুলির মোড়কগুলি নির্ণয় কর ঃ

1. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, যেখানে α একটি প্রমাত্রা।
[উত্তর $x^2+y^2=p^2$]

2. $ax\sec\alpha-by\operatorname{cosec}\alpha=a^2-b^2$, যেখানে α একটি প্রমাত্রা।
[উত্তর $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$]

3. $x\cos^n\theta+y\sin^n\theta=a$, যেখানে θ একটি প্রমাত্রা।
[উত্তর $x^{2/(2-n)}+y^{2/(2-n)}=a^{2/(2-n)}$]

4. $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$, যেখানে m একটি প্রমাত্রা।
[উত্তর $x^2+y^2=a^2$]

5. $y=mx+\frac{a}{m}$, যেখানে m একটি প্রমাত্রা। [উত্তর $y^2=4ax$]

6. $y=mx+\sqrt{a^2m^2\pm b^2}$, যেখানে m একটি প্রমাত্রা।
[উত্তর $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$]

13.04 কেন্দ্রজ (Evolute)

আমাদের জানা আছে যে, কোন বক্ররেখার কেন্দ্রজ বলতে বক্রতা-কেন্দ্রের সঞ্চার পথটিকেই বুঝায়। আবার যেহেতু দুটি পরস্পরছেদী অভিলম্বের সীমাকে বক্রতা কেন্দ্রের সংজ্ঞা হিসাবে ধরা হয়, সুতরাং কেন্দ্রজকে অন্যভাবে আমরা বলব যে, ইহা

প্রদত্ত বক্ররেখার অভিলম্ব পরিবারটির (envelope of normals) একটি মোড়ক। আবার মূল বক্ররেখার অভিলম্বগুলি, কেন্দ্রজের স্পর্শক। অতএব পূর্বের অধ্যায়ে বর্ণিত উপায়টি ছাড়াও আমরা এভাবে কোন বক্ররেখার কেন্দ্রজটি নির্ণয় করতে পারব।

13.05 $f(x, y, \alpha)=0$ পরিবারের মোড়কের সমীকরণ নির্ণয়

মনে করি প্রদত্ত বক্ররেখা পরিবারের সমীকরণে α একটি প্রমাত্রা। মনে করি এই পরিবারের মোড়কের সমীকরণটি $y=\phi(x)$, যেখানে $\phi(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন এবং অন্তরকলনযোগ্য ফাংশন। মোড়কের উপর একটি বিন্দু $M(x, y)$ কল্পনা করি। এই $M(x, y)$ বিন্দুটি পরিবারের কোন একটি বক্ররেখার উপর থাকবে এবং এই বক্ররেখার জন্য α এর একটি সুনির্দিষ্ট মান থাকবে যা $f(x, y, \alpha)=0$ ···(1) সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে; সুতরাং (x, y) বিন্দুর জন্য মনে করি $\alpha=\alpha(x,y)$: অতএব মোড়কের সকল বিন্দুর জন্য নিম্নলিখিত সমতাটি সিদ্ধ হবে

$$f(x, y, \alpha(x, y))=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

মনে করি $\alpha(x, y)$ ফাংশনটি অন্তরকলনযোগ্য ফাংশন যা ধ্রুবক নয়।

(2)নং সমীকরণ থেকে $M(x, y)$ বিন্দুতে মোড়কের স্পর্শকের নতি নির্ণয় করা যেতে পারে। y কে x এর ফাংশন মনে করে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়—

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]y'=0$$

$$\text{অথবা} \quad f_x+f_y y'+f_\alpha\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}y'\right]=0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

এখন $M(x, y)$ বিন্দুতে (1) পরিবারের স্পর্শকের নতি নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে পাওয়া যেতে পারে—

$$f_x+f_y y'=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

মনে করি $f_y\neq 0$, অন্যথায় x কে ফাংশন মনে করতে হত এবং y কে নিরপেক্ষ চল মনে করতে হত। এখন যেহেতু মোড়কের নতি পরিবারের বক্ররেখার নতির সমান, আমরা (3) এবং (4) থেকে পাই

$$f_\alpha\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}y'\right]=0.$$

কিন্তু যেহেতু মোড়কের উপর $\alpha(x, y)\neq$ ধ্রুবক, সেহেতু

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}y'\neq 0,$$

অতএব $f_{\alpha}(x, y, \alpha)=0$ ... ... (5)

সুতরাং নিম্নলিখিত দুইটি সমীকরণ মোড়ক নির্ণয়ের পক্ষে কার্যকরী

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, \alpha)=0 \\ f_{\alpha}(x, y, \alpha)=0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

বিপরীতভাবে যদি (6) এর সমীকরণদ্বয় থেকে α কে অপনয়ণ করা হয়, তবে $y=\phi(x)$ সমীকরণ পাওয়া যায়, যেখানে $\phi(x)$ ফাংশনটি অন্তরকলনযোগ্য এবং $\phi(x) \neq$ ধ্রুবক ; সুতরাং $y=\phi(x)$ সমীকরণটিই মোড়কের সমীকরণ।

মন্তব্য : যদি (1) পরিবারের ক্ষেত্রে $y=\phi(x)$ এমন একটি ফাংশন হয় যেখানে $f_x=0$ এবং $f_y=0$, তাহলে $f_x=0$ এবং $f_y=0$ সমাধান করে যে সকল বিন্দু পাওয়া যায় সেইসকল বিন্দুও (6) সমীকরণ সিদ্ধ করে।

প্রকৃতপক্ষে এই সব বিন্দুগুলিকে $x=\lambda(\alpha)$ এবং $y=\mu(\alpha)$ আকারে লেখা যেতে পারে। অতএব $f(x, y, \alpha)=0$ থেকে পাওয়া যায় $f(\lambda(\alpha), \mu(\alpha), \alpha)=0.$

α এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়—

$$f_x \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}+f_y \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}+f_{\alpha}=0$$

যেহেতু যে বিন্দুগুলির জন্য $f_x=0$ এবং $f_y=0$ সিদ্ধ সেই বিন্দুগুলির জন্য $f_{\alpha}=0$ সিদ্ধ হবে।

তাহলে (6) সমীকরণ থেকে মোড়ক বা ঐ সকল বিন্দুর সঞ্চারপথ পাওয়া যায়। সুতরাং (6) সমীকরণ থেকে সবসময় মোড়ক নাও পাওয়া যেতে পারে, সেজন্য চিত্রের সাহায্যে সঠিকভাবে স্থির করতে হয় (6) সমীকরণদ্বয় থেকে প্রকৃতপক্ষে মোড়ক পাওয়া গেল কিনা।

13.06 f(x, y, θ)=0 এই বক্ররেখার প্রত্যেকটি সদস্যকেই উহার মোড়ক একটি বিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মনে করি $\Gamma \equiv f(x, y, \theta)$, যেখানে θ স্থির $=\theta_1$ [ধরি], প্রদত্ত পরিবারের একটি সদস্য ; Γ বক্ররেখার উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি dy/dxকে এভাবে দেখান যেতে পারে,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

এক্ষেত্রে θকে θ_1 এ স্থির করে ধরা হয়েছে।

মোড়ক $x=\phi(\theta),\ y=\psi(\theta)$ এর প্রমাত্রিক সমীকরণটি

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, \theta)=0 \\ \text{এবং}\quad \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta)=0 \end{array}\right\}$$ এই সমীকরণ দুটির সমাধান করলেই পাওয়া যাবে।

সুতরাং, আমরা পাই

$$f\{\phi(\theta), \psi(\theta), \theta\}=0,$$

যা θ এর সাপেক্ষে একবার অন্তরকলনের পর হয়

$$\frac{\partial f}{\partial x}\phi'(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(\theta)+\frac{\partial f}{\partial \theta}=0$$

বা, $$\frac{\partial f}{\partial x}\phi'(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi(\theta)=0 \quad \left[\because\ \frac{\partial f}{\partial \theta}=0\right]$$

Γ বক্ররেখার উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হওয়ায় উহা মোড়কের উপরই অবস্থিত যখন $\theta=\theta_1$

এখন P বিন্দুতে মোড়কেব সঙ্গে স্পর্শকের নতিকে নিম্নলিখিতভাবে দেখান যেতে পারে ঃ

$$\frac{dy}{dx}=\left\{\frac{\psi'(\theta)}{\phi'(\theta)}\right\}_{\theta\ \theta_1}=\left\{-\frac{f_x}{f_y}\right\}_{\theta\ \theta_1} \quad \ldots \quad \text{(B)}$$

এবার (A) ও (B) সমীকরণ দুটি থেকে দেখা যায় যে P বিন্দুতে বক্ররেখার ও মোড়কটির স্পর্শকদুটি একই।

13.07 পরিবারের দুইটি নিকটবর্তী বক্ররেখার চরম ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথই মোড়ক

যখন একটি বক্ররেখা পবিবারের দুইটি কাছাকাছি অবস্থিত বক্ররেখা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে তখন P বিন্দুর স্থানাংকের জন্য নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়।

$$f(x, y, \theta)=0 \quad \text{এবং} \quad f(x, y, \theta+\delta\theta)=0$$

অর্থাৎ, $f(x, y, \theta)=0$ এবং $\dfrac{f(x, y, \theta+\delta\theta)-f(x, y, \theta)}{\delta\theta}=0$

এখন মধ্যমমান উপপাদ্যের দ্বারা পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}f(x, y, \theta+\kappa\delta\theta)=0 \quad \text{যখন} \quad 0<\theta<1.$$

আবার, $\delta\theta\to 0$ ধরলে P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $f=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}=0$ কে সিদ্ধ করে।

সুতরাং $f=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}=0$ এর θ অপনীয়কটিই হবে আমাদের প্রয়োজনীয় সঞ্চারপথ।

13.08 দুই প্রমাত্রা বিশিষ্ট বক্ররেখা পরিবারের মোড়ক (Envelope of two parameter family) :—

যদি কোন বক্ররেখা পরিবারের সমীকরণে α এবং β এই দুইটি প্রমাত্রা (parameter) দেখা যায় তবে P বক্ররেখা পরিবারটির মোড়কের সমীকরণ আমরা নীচের দুটি পদ্ধতি প্রয়োগ করে নির্ণয় করতে পারি। প্রথমে মনে করা যাক, আলোচ্য বক্ররেখা পরিবারের সমীকরণ $\phi(x, y, \alpha, \beta)=0$ ... ... (1)

যেখানে α ও β, $\psi(\alpha, \beta)=0$ ··· (2) এই সমীকরণ দ্বারা সিদ্ধ হয়।

প্রথম পদ্ধতি : প্রথমে $\psi(\alpha, \beta)=0$ এই সমীকরণটির থেকে β এর মান α এর সাহায্যে নির্ণয় করতে হবে, এবং β এর ঐ মান $\phi(x, y, \alpha, \beta)=0$ সমীকরণে প্রতিস্থাপিত করতে হবে। তাহলেই এখন (1) নং সমীকরণটি একটি এক প্রমাত্রা বিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত হবে এবং আমরা খুব সহজেই তখন $\phi=0$ ও $\dfrac{\partial\phi}{\partial\alpha}=0$ এর থেকে α কে অপনয়ন করে মোড়ক নির্ণয় করতে পারব।

দ্বিতীয় পদ্ধতি : মোড়কটির উপর যে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x, y) এর জন্য মনে করি, $\dfrac{\partial\phi}{\partial\alpha}d\alpha+\dfrac{\partial\phi}{\partial\beta}d\beta=0$ ... ... (3)

এবং (2) নং সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}d\beta=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

(3) এবং (4) নং সমীকরণ দুটি থেকে $d\alpha$ এবং $d\beta$ অপনয়ন করার পর পাই,

$$\frac{\dfrac{\partial\phi}{d\alpha}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{d\beta}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial\beta}} \qquad \cdots \qquad (5)$$

এখন (1), (2) ও (3) এর মধ্যে α ও β অপনয়ন করলে নির্ণেয় মোড়কের সমীকরণটি পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 1. অভিলম্বের মোড়ক হিসাবে $y^2=4ax$ এই অধিবৃত্তের কেন্দ্রজ (evolute) নির্ণয় কর।

উত্তর : অধিবৃত্তের যে কোন 'm' বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y=mx-2am-am^3 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (A)$$

এখন মোড়কটি নির্ণয় করার জন্য মনে করি, m একটি প্রমাত্রা।

$\therefore$ সমীকরণ (A) কে m এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$0=x-2a-3am^2, \text{ বা, } m^2=(x-2a)/3a \quad \cdots \quad \text{(B)}$$

সমীকরণ (A) থেকে পাই, $y=m(x-2a-am^2)$

$$=m(3am^2-am^2)=2am^3$$

$$\therefore \quad y^2=4a^2m^6=4a^2\,\frac{(x-2a)^3}{27a^3}$$

বা, $27a^3y^2=4(x-2a)^3$

এখন যেহেতু ইহা অভিলম্বের মোড়ক, অতএব ইহাকে অধিবৃত্তটির কেন্দ্রজ্ঞ হিসাবে ধরা যেতে পারে।

উদাহরণ 2. $\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}=1$ এই অধিবৃত্তগুলির মোড়ক নির্ণয় কর, যখন $\alpha\beta=k^2$; α এবং β দুইটি প্রমাত্রা।

উত্তর : আমরা জানি, $\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}=1 \quad \cdots \quad$ (A)

ও $\quad \alpha\beta=k^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (B)

অতএব (A) ও (B) সমীকরণদ্বয়ের যথাক্রমে α ও β এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করার পর পাওয়া যায়,

$$\frac{\sqrt{x}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\,d\alpha+\frac{\sqrt{y}}{\beta^{\frac{3}{2}}}\,d\beta=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(C)}$$

এবং $\quad \dfrac{d\alpha}{\alpha}+\dfrac{d\beta}{\beta}=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (D)

আবার (C) ও (D) থেকে পাওয়া যায়—

$$\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{\alpha}}=\frac{\dfrac{\sqrt{y}}{\beta^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{\beta}} \quad \text{বা,} \quad \frac{\sqrt{\frac{x}{\alpha}}}{1}=\frac{\sqrt{\frac{y}{\beta}}}{1}=\frac{\sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left[\because \sqrt{\frac{x}{\alpha}}+\sqrt{\frac{y}{\beta}}=1\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{\frac{x}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{y}{\beta}}}{1}=\frac{1}{4}$$

বা, $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\dfrac{1}{4}$; এখন বর্গ করে এবং $\alpha\beta=k^2$ বসিয়ে নির্ণেয় মোড়কটি পাওয়া যায়, $16xy=k^2$

13.09 দুই প্রমাত্রা বিশিষ্ট বক্ররেখা পরিবার এবং তার মোড়ক জানা থাকলে প্রমাত্রাদ্বয়ের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় :

মনে করি পরিবারের সমীকরণ $\phi(x, y, \alpha, \beta)=0$

এবং মোড়কের সমীকরণ $F(x, y)=0$

এখন α ও β এর মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করতে হলে $\phi(x, y, \alpha, \beta)$ পরিবারের মোড়ক নির্ণয় করতে হবে যেখানে α, β কে দুইটি চল মনে করতে হবে এবং x, y কে দুইটি প্রমাত্রা (যেখানে প্রমাত্রার সম্পর্ক $F(x, y)=0$) মনে করতে হবে।

উদাহরণ মনে কর $\phi(x, y, a, b)=x/a+y/b-1$ ... (1)

এবং $F(x, y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{2}{3}}$ ... (2)

এখন $\dfrac{\phi_x}{F_x}=\dfrac{\phi_y}{F_y}$ অর্থাৎ $\dfrac{\phi_x}{\phi_y}=\dfrac{F_x}{F_y}$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}} \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{b}{a}=\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \qquad \cdots \qquad (3)$$

(3) থেকে পাওয়া যায়—

$$\frac{x/a}{a^2}=\frac{y/b}{b^2}=\frac{x/a+y/b}{a^2+b^2}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a^3}{a^2+b^2}, \quad \text{এবং} \quad y=\frac{b^3}{a^2+b^2}$$

$\therefore \quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ থেকে পাওয়া যায়—

$$\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}}=c^{\frac{2}{3}}$$

অর্থাৎ $a^2+b^2=c^2$,

উহাই নির্ণেয় সম্বন্ধ।

বিবিধ অনুশীলনী 13.

1. দেখাও যে $(x-\alpha)^2+y^2-R^2=0$ পরিবারের (যেখানে α একটি প্রমাত্রা) মোড়ক $y=\pm R$.

2. $x=at^2$, $y=2at$ বক্ররেখার t বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বাহির কর এবং পরে t কে প্রমাত্রা কল্পনা করে সমস্ত স্পর্শকের কার্টেসীয় স্থানাঙ্কে মোড়কের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে $y=m^2x+\dfrac{1}{m^2}$ পরিবারের (যেখানে m একটি প্রমাত্রা) মোড়কের সমীকবণ $y^2=4x$.

4. দেখাও যে $(x-\alpha)^2+y^2=4\alpha$ পরিবারেব (যেখানে α একটি প্রমাত্রা) মোড়কের সমীকরণ $y^2-4x-4=0$

5. দেখাও যে $y=mx+m^4$ পরিবারেব (যেখানে m একটি প্রমাত্রা) মোড়কের সমীকরণ $256y^6+27x^4=0$.

6. $x\cos^3\theta+y\sin^3\theta=a$ (সেখানে θ একটি প্রমাত্রা) পরিবারের মোড়ক নির্ণয় কর। [উত্তর : $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$]

7. যদি নিম্নলিখিত পরিবারের

$$t^2f(x,y)+g(x,y)+h(x,y)=0$$

একটি মোড়ক থাকে, তবে দেখাও যে

$$g^2(x,y)-4f(x,y)\,h(x,y)=0.$$

8. দেখাও যে নিম্নলিখিত অধিবৃত্তীয় পবিবারের

$$y=x\tan\theta-\tfrac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$$

(যেখানে θ একটি প্রমাত্রা এবং g ও u ধ্রুবক) মোড়ক একটি অধিবৃত্ত।

9. দেখাও যে নিম্নলিখিত উপবৃত্তীয় পরিবারের $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$

(যেখানে a একটি প্রমাত্রা) মোড়কের সমীকরণ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

10. দেখাও যে $\alpha x+\beta y+1=0$ পরিবারের প্রমাত্রার মধ্যে যখন $a^2\alpha^2+b^2\beta^2=1$ সম্বন্ধ বিদ্যমাণ থাকে, তখন মোড়কের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

11. দেখাও যে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ বক্ররেখার অভিলম্বের সমীকরণ নিম্নলিখিত আকারে লেখা যেতে পারে :

$$x \sin \phi - y \cos \phi + a \cos 2\phi = 0.$$

এক্ষণে এই অভিলম্ব পরিবারের মোড়কের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[উত্তর : $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$]

এই মোড়কের সঙ্গে বক্ররেখার আর কি সম্পর্ক আছে ?

12. দুই প্রমাত্রাবিশিষ্ট পরিবারের সমীকরণ যদি

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

হয় এবং উহার মোড়কের সমীকরণ যদি $4xy=c^2$ হয় তবে a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। [উত্তর : $ab=c^2$]

13. যে সমস্ত বৃত্ত $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষ-বিন্দুগামী এবং যাদের কেন্দ্র এই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, সেই বৃত্তীয় পরিবারের মোড়ক নির্ণয় কর।

[উত্তর : $y^2(2a+x)+x^3=0$]

চতুর্দশ অধ্যায়

গতিবিজ্ঞান

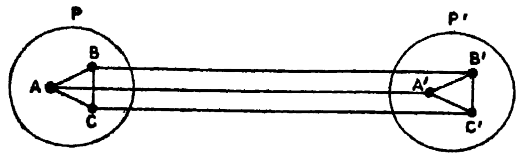
14.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

পদার্থ বিজ্ঞানে দেখা যায় বিশ্বের সব বস্তুই গতিশীল। "গচ্ছতি ইতি জগৎ'। এজন্য পদার্থবিদ্যায় গতির আলোচনা বিশেষ মূলগত স্থান অধিকার করে আছে। এই গতির বিস্তারিত আলোচনা করা হয় গতিবিজ্ঞানে (Dynamics)। নিউটনের গতি-সম্বন্ধীয় সূত্র অনুসারে বস্তুর গতি-অবস্থার পরিবর্তনের জন্য চাই বলপ্রয়োগ। বলের ক্রিয়া সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়ে থাকে বলবিদ্যায় বা বলবিজ্ঞানে (Mechanics বা science of mechanics)। এই বলবিদ্যাকে নানা শাখায় ভাগ করা হয়। যেমন স্থিতিবিজ্ঞান, সৃতিবিদ্যা, গতিবিদ্যা। বলবিদ্যার যে শাখায় স্থিতি-অবস্থায় বস্তুর উপর বিভিন্ন বলের পারস্পরিক সম্বন্ধ প্রভৃতি প্রধানতঃ আলোচনা করা হয় সেই শাখাকে বলা হয় স্থিতিবিজ্ঞান (statics)। যে শাখায় পদার্থের বলের কোনরূপ বিবেচনা না করে গতি সম্বন্ধীয় বিভিন্ন আলোচনা করা হয় তাকে বলা হয় সৃতিবিদ্যা (kinematics)। আর যে শাখায় বলের বিবেচনা করা হয় গতির বিশ্লেষণে তাকে বলা হয় গতিবিদ্যা (kinetics)। এই অধ্যায়ে আমরা গতিবিজ্ঞানে কলনবিদ্যাব কোন কোন প্রয়োগ সম্বন্ধে সংক্ষেপে আলোচনা করব। নিউটন কলনবিদ্যার যেভাবে রূপ দেন তাতে গতিবিজ্ঞানের ধারণা ও প্রতীক বিশেষভাবে ব্যবহার করা হয়।

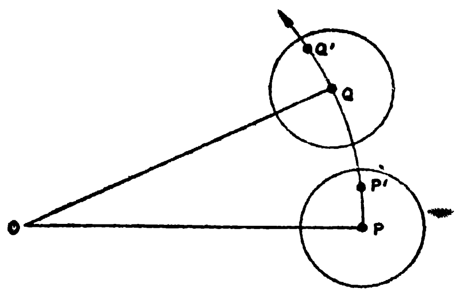
14.02 কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

গতিবিজ্ঞানের আলোচনা করার সময় আমরা প্রথমে গতির প্রকারভেদ সম্বন্ধে চিন্তা করব। গতি বিভিন্ন প্রকার হতে পারে, কিন্তু দৃঢ় (rigid) বস্তুর গতি প্রধানত দুইপ্রকার : (1) সরণ—যদি কোন একটি গতিশীল বস্তুর প্রতিটি কণা সমান্তরাল সরলরেখা বরাবর একই দূরত্ব অতিক্রম করে স্থান পরিবর্তন করে, তাহলে বস্তুর সেই গতিকে সরণ বলা হয়। মনে করা যাক একটি খেলার বলকে অবস্থান P থেকে সরলরেখা বরাবর P' অবস্থানে ঠেলে দেওয়া হল, এই অবস্থায় বলটি যে গতিতে P' অবস্থানে পৌঁছবে তাকে বলা হয় বস্তুটির সরণ। বলটির মধ্যে তিনটি কণার প্রাথমিক

অবস্থান A, B, C এবং চূড়ান্ত অবস্থান A', B', C' যথাক্রমে পরস্পর যোগ করলে যে তিনটি সরলরেখা পাওয়া যাবে তাতে দেখা যাবে $AA'=BB'=CC'$. এবং ইহারা সমান্তরাল।



(2) ঘূর্ণন—যখন গতিশীল বস্তুর প্রতিটি কণা একটি সরলরেখা বা অক্ষ থেকে দূরত্ব সমান রেখে পরিভ্রমণ করে, তখন তার গতিকে ঘূর্ণন গতি বলা হয়ে থাকে। যেমন মনে কর যে কোন একটি বিন্দু P থেকে একটি বস্তুকণা একটি বক্ররেখা বরাবর Q বিন্দুতে গেল এবং P গেল Q' তে। এখন চিত্র থেকে দেখা যায় $OP=OQ$,



$OP'=OQ'$; অতএব এক্ষেত্রে আমরা সংজ্ঞানুযায়ী বলতে পারি বস্তুটি একটি ঘূর্ণন গতি নিয়ে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুতে যায় এবং P' বিন্দু থেকে Q' বিন্দুতে যায়।

সরণ ও ঘূর্ণন ছাড়া এদের সংমিশ্রণে আর একপ্রকার গতি উৎপন্ন করা যায়—একে বলা হয় থাকে জটিল গতি। উদাহরণস্বরূপ আমরা জানি পৃথিবী নিজের মেরুদণ্ডে পাক খায় এবং ইহা একটি উপবৃত্তীয় পথে এগিয়ে চলে। সুতরাং পৃথিবীর এই গতিকে বলা যেতে পারে জটিল গতি।

সংজ্ঞা :—

সরণ (displacement) : কোন চলমান বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের সাপেক্ষে প্রথম ও শেষ অবস্থানের রৈখিক চ্যুতিকে তার সরণ বলা হয়।

দ্রুতি (speed) : সরল বা বক্রপথে কোনও বস্তু বা বস্তুকণা একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে বস্তুকণার দ্রুতি বলা হয়। এককথায় বলা যেতে পারে যে অবস্থানের পরিবর্তনের হারই দ্রুতি। অর্থাৎ কোন বস্তু এক সেকেণ্ডে যতটা

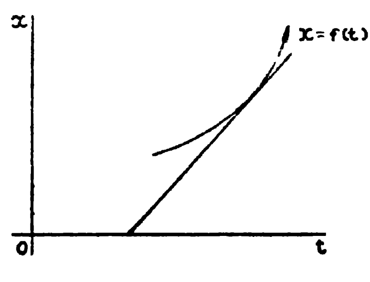
দূরত্ব যেতে পারে তাকেই বস্তুকণার দ্রুতি বলে। মনে কর কোন বিন্দু s cm দূরত্ব t sec এ অতিক্রম করে, তাহলে এক সেকেণ্ডে বস্তুটি s/t দূরত্ব যায় ; সুতরাং বস্তুটির দ্রুতি s/t (cm/sec) , দ্রুতি একটি স্কেলার (scalar) রাশি।

14.03 বেগ ও ত্বরণ : গতিবিজ্ঞানে বেগ জানা ও ত্বরণ কথা দুটি ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়ে থাকে। পদার্থ বিজ্ঞান থেকে জানা যায় যে কোন বস্তু বা কণার নির্দিষ্ট দিকে একক সময়ের সরণের হারকে বেগ (velocity) বলা হয়। বেগ একটি ভেক্টর (vector) রাশি। মনে করি একটি স্থির বিন্দু P থেকে t সময়ের সাপেক্ষে M চলন্ত বিন্দুটির দূরত্ব x, আবার ধরি কিছু সময় δt পরে M বিন্দুটি N অবস্থানে আসে।



এখন $PN = x + \delta x$, তাহলে $MN = \delta x$.

আমরা জানি যে বেগ বলতে সরণের হারকেই বুঝায়, সুতরাং বেগকে v চিহ্ন দ্বারা দেখানো হলে, t সময়ে M বিন্দুর গতিবেগকে কলনবিদ্যার সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যেতে পারে :



$$v = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}$$

সুতরাং কলনবিদ্যায় গতিবেগ বলতে আমরা বুঝব $\frac{dx}{dt}$ কে বা সময়ের সাপেক্ষে দূরত্ব পরিবর্তনের হার বা সরণের হারকে। $\frac{\delta x}{\delta t}$ বেগের গড় হিসাব দেয়, কিন্তু $\frac{dx}{dt}$ প্রকৃত বেগ দেয়। $\frac{dx}{dt}$ কে কখনও কখনও $\dot{x}$ আকারে লেখা হয়ে থাকে।

উদাহরণ 1 : যখন কোন একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখা অবলম্বন করে চলতে শুরু করে এবং t সেকেণ্ড সময় পরে বস্তুকণাটি ঐ সরলরেখা বরাবর প্রাথমিক অবস্থান থেকে এমন একটি দূরত্ব অতিক্রম করে যাকে $x=9+6t+3t^3$ সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তখন 2 সেকেণ্ড পরে উহার গতিবেগ কত ?

উত্তর :—এখানে আমরা জানি

$$x=9+6t+3t^3$$

উভয় দিকে t এর সাপেক্ষে অন্তর-কলন করার পর পাওয়া যায়,

$$\frac{dx}{dt}=6+9t^2 \qquad \cdots \quad (1)$$

(i) নং সমীকরণে $t=2$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=2}=(v)_{t=2}=6+9.2^2=42 \text{ ফুট / সেকেণ্ড}$$

$\therefore$ 2 সেকেণ্ড সময় পরে $(t=2)$ বস্তুকণাটির গতিবেগ $=42$ ফুট / সেকেণ্ড।
আবার একক সময়ে বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ (acceleration) বলা হয়। বেগের মত ত্বরণও ভেক্টর রাশি। ত্বরণেব c.g s. পদ্ধতিতে একক cm/sec^2 এবং f.p.s. পদ্ধতিতে একক ft/sec^2. পদার্থ বিদ্যায় ত্বরণকে সাধারণতঃ 'f' এই চিহ্ন দ্বারা দেখান হয়ে থাকে। কিন্তু এখানে সুবিধার জন্য ত্বরণকে 'a' এই চিহ্নটি দ্বারা প্রকাশ করা হবে। এখন আমরা ত্বরণকে কলন বিদ্যার পরিভাষায় নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করব ; যেমন

যদি কোন বস্তুর t সময়ে গতি v হয় এবং $(t+\delta t)$ সময় পরে মনে করি উহার গতিবেগ $(v+\delta v)$ হল। যেহেতু ত্বরণকে বেগবৃদ্ধির হার হিসাবে ধরা হয়ে থাকে, সেহেতু t সময়ে ত্বরণ,

$$a=\lim_{\delta t\to 0}\frac{(v+\delta v)-v}{\delta t}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta v}{\delta t}=\frac{dv}{dt}$$

$$\therefore \quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

আবার যেহেতু আমরা আগেই দেখেছি যে, গতিবেগ

$$v=\frac{dx}{dt} \quad \therefore\; a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v$$

$$\therefore \quad a=\frac{dv}{dt}=v\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$ কে মাঝে মাঝে $\ddot{x}$ এই চিহ্ন দ্বারাও দেখান হয়।

উদাহরণ 2. যদি কোন একটি বস্তুকণা ঋজু পথে (সরল রৈখিক পথে) গমন করে এবং যদি t সেকেণ্ডে সময় পরে ঋজু পথটির উপর একটি বিন্দু হইতে বস্তু কণাটির দূরত্ব (ফুট হিসাবে) $x = 6 + 2t + 2t^3$ হয় তবে প্রমাণ কর যে 4 সেকেণ্ড সময় পরে বস্তু কণাটির ত্বরণ (acceleration) = 48 ফুট / সেকেণ্ড^2 হবে।

উত্তর ঃ এখানে দেওয়া আছে যে

$$x = 6 + 3t + 2t^3$$

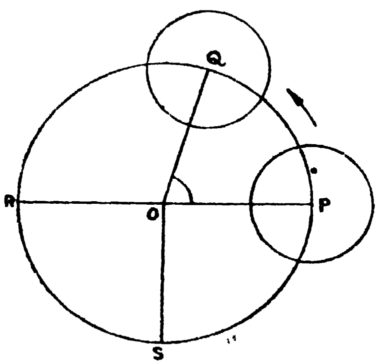
$$\frac{dx}{dt} = 3 + 6t^2$$

এবং $$\frac{d^2x}{dt^2} = 12t$$

যেহেতু আমরা জানি যে ত্বরণ $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, সুতরাং 4 সেকেণ্ড সময় পরে ত্বরণ,

$\frac{d^2x}{dt^2} = 12 \times 4 = 48$ ফুট / সেকেণ্ড^2 ।

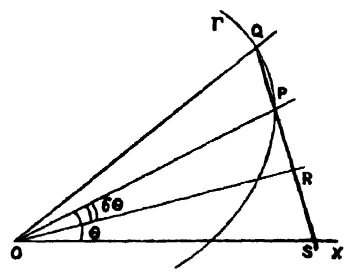
14.04 কৌণিক বেগ (Angular Velocity). পদার্থ বিদ্যায় আমাদের জানা আছে যে, কোন বস্তুকণা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে যদি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরতে আরম্ভ করে, তবে একক সময়ে অতিক্রান্ত পথটি বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ সৃষ্টি করে, তাকেই বস্তুকণাটির গড় কৌণিক বেগ বলা হয়। চিত্রটি থেকে দেখা যায় যে $PQRS$ এই বৃত্তটির O কে কেন্দ্র করে একটি বস্তুকণা ঘুরছে। মনে করি বস্তুকণাটির P হইতে Q বিন্দুতে আসতে t সেকেণ্ড সময় লাগে, এবং বস্তুকণাটি উহার প্রাথমিক এবং চূড়ান্ত



অবস্থানদ্বয়ের সঙ্গে O কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ সৃষ্টি করে, অর্থাৎ $\angle POQ = \theta$, তাহলে যখন t সেকেণ্ডে বস্তুটি θ কোণ সৃষ্টি করে তখন এক সেকেণ্ডে বস্তুটি θ/t কোণ সৃষ্টি করে। অতএব সাধারণভাবে বলা যায় বস্তুকণাটির গড় কৌণিক বেগ হবে,

$w = \theta/t$ রেডিয়ান / sec. সুতরাং কৌণিক বেগের উপরোক্ত সংজ্ঞাটির ক্ষেত্রে বলা যায় যে—O কেন্দ্রের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান বস্তুকণাটির কৌণিক বেগ বলতে, সময় সাপেক্ষে θ কোণটির পরিবর্তনের হারকেই বুঝায়।

বস্তুকণার কৌণিক বেগ w কে কলন বিদ্যার সাহাযো সঠিকভাবে প্রকাশ করা যাইতে পারে ; যেমন—মনে করি একটি বস্তুকণা যার গতিবেগ t সময়ের সাপেক্ষে v, উহা Γ এই বক্ররেখাটি বরাবর এগিয়ে আসছে এবং মনে করি যে t সময়ে বক্ররেখাটিতে উহার প্রাথমিক অবস্থান ছিল P ও $(t+\delta t)$ সময়ে উহার চূড়ান্ত অবস্থান ছিল Q ; মনে করি O একটি স্থির বিন্দু এবং OX একটি স্থির সরলরেখা। এখন ধরা যাক $\angle XOP = \theta$ রেডিয়ান এবং $\angle XOQ = \theta + \delta\theta'$; OP সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য r এবং $OQ = r + \delta r$. PQ রেখাটির উপর মনে কবি OR লম্ব।



এখন যেহেতু সংজ্ঞা থেকে আমাদের জানা আছে যে, O বিন্দুটির চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান P বিন্দুর কৌণিক বেগ w বলতে বুঝায় θ এই কোণটির পরিবর্তনের হারকেই ; অতএব কলন বিদ্যার সাহায্য নিয়ে উহাকে নিম্নলিখিতভাবে দেখান যেতে পারে,—যেমন ঃ

$$w = \frac{d\theta}{dt}.$$

এবার চিত্রটি থেকে পাওয়া যায়,

$$OP \cdot OQ \sin POQ = 2\triangle POQ = PQ \cdot OR$$

$$\therefore \quad r(r+\delta r) \sin \delta\theta = 2\triangle POQ = \text{চাপ } PQ \frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ} \cdot OR$$

এখন δt দ্বারা ভাগ করার পর পাওয়া যায়,

$$r^2 \frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta} \cdot \frac{\delta\theta}{\delta t} + r\frac{\delta r}{\delta t} \sin \delta\theta = 2\frac{\triangle POQ}{\delta t} = \frac{\text{চাপ } PQ}{\delta t} \cdot \frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ} \cdot OR$$

মনে করি $\delta t \to 0$, তাহলে $\delta\theta \to 0$ এবং $\sin \delta\theta \to 0$ ও

$$\frac{\text{জ্যা } PQ}{\text{চাপ } PQ} \to 1, \text{ এবং } \frac{\text{চাপ } PQ}{\delta t} \to v.$$

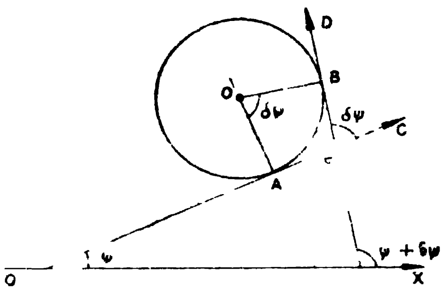
সুতরাং এ অবস্থায়, PQ, P বিন্দুতে স্পর্শকে পরিণত হয় এবং OR তখন O বিন্দুটি থেকে স্পর্শকের উপর লম্ব হয়। মনে করি $OR = p$.

এখন $\frac{POQ}{\delta t} = POQ$ ক্ষেত্রের পরিক্রমণের হার মনে করা হলে ও উহাকে h দ্বারা প্রকাশ করার পর পাওয়া যায়,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = 2h = pv$$

বা $$r^2 w = pv.$$

14.05 যদি একটি বস্তুকণা একটি r ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্তাকার পথে v গতিবেগে ঘুরতে সুরু করে তখন যে কোন মুহূর্তে উহার কেন্দ্রের দিকে ত্বরণ v^2/r.



মনে করি একটি বস্তুকণা একটি বৃত্তাকার পথে (যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r) v গতিবেগে ঘুবতে থাকে। ধরা যাক t সময় পর বস্তুকণাটি A অবস্থানে পৌঁছায় এবং কিছু সময় δt পরে উহা বৃত্তাকার পথটির উপর B অবস্থানে আসে। এবার মনে করি বৃত্তটির উপর A ও B বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় AC ও BD, X অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে ψ ও $\psi + \delta\psi$ কোন (রেডিয়ান মাপের) সৃষ্টি করে।

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle BEC = \delta\psi. \quad \text{এবং} \quad \frac{\delta\psi}{\text{চাপ } AB} = \frac{1}{r} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

এখন A বিন্দুতে AC বরাবর বস্তুকণাটির গতিবেগ v এবং যেহেতু বস্তুকণাটি একটি নির্দিষ্ট গতিবেগে চলে, সেহেতু BD বরাবর B বিন্দুতে বস্তুকণাটির গতিবেগও v হবে, এবং AC স্পর্শক বরাবর উহার একটি অংশ (component) $v \cos \delta\psi$ এবং AC এর সহিত লম্ব (অর্থাৎ AO এর সমান্তরাল) বরাবর অংশটি হবে $v \sin \delta\psi$.

আবার যদি মনে করা যায় যে, বস্তুকণাটির স্পর্শক ও লম্ব বরাবর ত্বরণ অংশদ্বয় যথাক্রমে a_s এবং a_n, তাহলে

$$a_s = \lim_{\delta t\to 0} \frac{v\cos\delta\psi - v}{\delta t} = -v\lim_{\delta t\to 0}\frac{1-\cos\delta\psi}{\delta t}$$

$$= -v\lim_{\delta t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\delta\psi}{\delta t}$$

$$= -v\lim_{\delta t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\delta\psi}{\frac{1}{2}\delta\psi}\right)^2\frac{\delta\psi}{\delta t}\cdot\frac{1}{2}\delta\psi$$

এবার যখন $\delta t\to 0$ তখন $\delta\psi\to 0$ এবং $\lim\frac{\sin\frac{1}{2}\delta\psi}{\frac{1}{2}\delta\psi}=1$

$$\therefore\quad a_s = -v.1.\frac{d\psi}{dt}\cdot 0 = 0 \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

সুতরাং দেখা গেল যে স্পর্শক বরাবর ত্বরণ $a_s = 0$

এখন, $a_n = \underset{\delta t\to 0}{\text{Lt}}\frac{v\sin\delta\psi}{\delta t}$

$$= v\lim_{\delta t\to 0}\frac{\sin\delta\psi}{\delta\psi}\cdot\frac{\delta\psi}{\text{চাপ } AB}\cdot\frac{\text{চাপ } AB}{\text{জ্যা } AB}\cdot\frac{\text{জ্যা } AB}{\delta t}.$$

$$\therefore\quad a_n = v\cdot 1\cdot\frac{1}{r}\cdot 1\cdot v = \frac{v^2}{r} \qquad \cdots \quad \text{(iii)}$$

[$\because$ (i) নং থেকে আমরা জানি, $\frac{\delta\psi}{\text{চাপ } AB}=\frac{1}{r}$ এবং যখন $\delta t\to 0, \delta\psi\to 0$ ও $B\to A$, তখন $\lim\frac{\sin\psi\delta}{\delta\psi}=1$, $\lim\frac{\text{চাপ } AB}{\text{জ্যা } AB}=1$ এবং $\lim\frac{\text{জ্যা } AB}{\delta t}=v$]

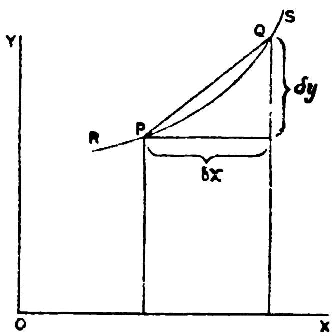
এখন উপরের (ii) এবং (iii) নং থেকে দেখা যায় যে P বিন্দুতে বস্তুকণাটির লব্ধি (Resultant) ত্বরণ $f_n=\frac{v^2}{r}$ এবং ইহা অভিলম্ব AO বরাবর কেন্দ্রের দিকে কাজ করে।

14.06 দ্বি-মাত্রিক গতি : আমরা দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ধারণা থেকে জানি যে, কোন একটি বিন্দুর অবস্থান বুঝতে হলে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বলতে হয়, যেমন আমরা বলি এক টি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) তাহলে আমাদের বুঝতে হবে দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা OX এবং OY থেকে বিন্দুটির দূরত্ব যথাক্রমে y ও x ; একইভাবে গতি অবস্থানের ক্ষেত্রে যখন একটি বস্তুকণা একটি সমতলের উপর বিচরণ

করতে থাকে এবং তখন যদি ঐ তলের উপর দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা OX এবং OY থাকে তবে বস্তুকণাটির অবস্থান নির্ণয় করতে হলে OX এবং OY অক্ষ দুটি থেকে উহার লম্বদূরত্বদ্বয় যথাক্রমে y ও x কে নির্ণয় করতে হবে, তাহলে তখন বলা যাবে ঐ বস্তুকণাটির স্থানাঙ্ক (x, y).

এখন অক্ষদ্বয় বরাবর কোন গতিশীল বস্তুকণার গতিবেগ ও ত্বরণের অংশগুলি নির্ণয় করা হবে।

মনে করি কোন একটি বস্তুকণা T এই বক্ররেখাটির উপর t সময়ে P অবস্থানে আছে এবং $(t+\delta t)$ সময় পর ধরি, বস্তুকণাটি Q অবস্থানে পৌঁছায় ; P, Q বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক দুটি যথাক্রমে ধরা যাক, (x, y) এবং $(x+\delta x,\ y+\delta y)$. এখন আমরা বলতে পারি যে, X অক্ষের সমান্তরাল ভাবে δt সময় সাপেক্ষে বস্তুকণাটির সরণ δx. অতএব X অক্ষের সমান্তরালভাবে গতিবেগের বিভাজিত অংশটি (resolved part) হয়



$$v_x = \lim_{\delta t \to o} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt},$$

যেহেতু x, t এর একটি ফাংশন।

অনুরূপভাবে y অক্ষের সমান্তরালভাবে গতিবেগের বিভাজিত অংশটি হয়

$$v_y = \lim_{\delta t \to o} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dx}{dt};$$

সুতরাং P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক যখন (x, y) দেওয়া থাকে তখন অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল আংশিক গতিবেগদ্বয় (Component Velocities) হয়,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

∴ এখন লব্ধি বেগ (Resultant Velocity) হয়,

$$V=\sqrt{\left(v_x^2+v_y^2\right)}=\sqrt{\left\{\frac{dx}{dt}\right\}^2+\left\{\frac{dy}{dt}\right\}^2}.$$

আবার লব্ধি বেগ যদি x-অক্ষের সহিত θ কোন সৃষ্টি করে, তবে,

$$\tan\theta=\frac{dy/dt}{dx/dt}=dy/dx$$

একইভাবে অক্ষদ্বয় বরাবর ত্বরণের অংশদ্বয়কেও আমরা নিম্নলিখিতভাবে দেখাতে পারি

$$a_x=\frac{d}{dt}(v_x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y=\frac{d}{dt}(v_y)=\frac{d}{dt}(dy/dt)=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

14.07 বল (Force) ঃ

আমাদের জানা আছে যে পদার্থ বিজ্ঞানে চেয়ার, টেবিল, ইত্যাদি কয়েক ধরণের বস্তুকে বলা হয়ে থাকে জড় বস্তু। কারণ উহারা আপনা আপনি স্থান পরিবর্তনে অক্ষম। যেমন একটি টেবিলকে হাত দিয়া ঠেলিযা না দিলে উহা কখনই এক স্থান থেকে অন্যস্থানে সরে যেতে পারে না।

এখানে টেবিলটিকে সরে যাবার জন্য হাত দিয়া যে বস্তুটি টেবিলটিব উপর প্রয়োগ করা হল তাকে পারিভাষিক অর্থে বলা হবে—টেবিলটির উপর হাত দিয়া বলপ্রয়োগ করা হল।

আবার একটি বড় টেবিল এক আঙুলের সাহায্যে তুলিতে চেষ্টা করিলে টেবিলটাকে তোলা যাবে না ; কিন্তু আঙ্গুলের ডগা দিয়ে সামান্য আঘাত করলেই একটি ছোট রবারের বল গড়িয়ে যাবে।

অতএব আমরা প্রথম উদাহরণগুলি থেকে বুঝতে পারি যে প্রতি ক্ষেত্রেই বস্তুর উপর কিছু প্রয়োগ করা হয়েছে। ইহার নাম বল (Force), অর্থাৎ যাহার প্রয়োগের কোন একটি বস্তু বা বস্তুকণা সমস্টির স্থিরতা বা স্থিরগতির পরিবর্তন আনার চেষ্টা করা হয় অথবা চলমান বস্তুর দিক পরিবর্তন করা হয়।

বলপ্রয়োগের বস্তুর স্থিরতা বা গতি কিরূপ হবে অথবা কতখানি বলে কিরূপ গতি সঞ্চারিত হবে ইত্যাদি বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধানের নিমিত্ত মহাবিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন বিভিন্ন গতিশীল পদার্থসমূহের প্রধানতঃ মহাকাশে বিচরণশীল গ্রহ, উপগ্রহ বা জ্যোতিষ্কগুলির গতি পর্যবেক্ষণ করে তিনটি মূল্যবান সূত্র লিপিবদ্ধ করে গেছেন।

নিউটনের এই গতিসূত্রগুলি থেকে পদার্থের ভর উহার গতি এবং উহার উপর প্রদত্ত বলের ভিতর সম্বন্ধ ব্যক্ত করা হয়। সুতরাং নিউটনের তিনটি গতিসূত্রকেই গতিবিজ্ঞানের স্তম্ভস্বরূপ ধরা যেতে পারে।

প্রথম গতিসূত্র ঃ বাহির থেকে প্রযুক্ত বলের দ্বারা অবস্থার পরিবর্তন করতে বাধ্য না করলে অচল বস্তু চিরকাল অচল অবস্থাতেই থাকবে এবং সচল বস্তু চিরকাল (reaction) সমবেগে সরলরেখায় চলবে।

দ্বিতীয় সূত্র ঃ বস্তুর ভরবেগের (momentum) পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং বল যে দিকে ক্রিয়া করে ভরবেগের পরিবর্তনও সেই দিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র ঃ প্রত্যেক ক্রিয়ারই (action) একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া (reaction) আছে।

এখন আমরা (বল = ভর × ত্বরণ) এই সমীকরণটি প্রমাণ করব।

মনে করা যাক কোন বস্তুকণার ভর 'm' এবং উহা u বেগে চলছে, এখন t সময় ধরে বস্তুটির উপর যদি F বল প্রয়োগ করা হয় তবে তার বেগ পরিবর্তিত হবে। ধরা যাক t সময়ের সাপেক্ষে P বস্তুকণাটির বেগ v. সুতরাং নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা জানি

বল $\propto$ ভরবেগের পরিবর্তনের হার

অর্থাৎ $F \propto \dfrac{d}{dt}(mv)$

বা $F = c\dfrac{d}{dt}(mv)$ [এখানে c একটি ধ্রুবক]

$= cm\dfrac{dv}{dt}$ $\left(\because \; m \text{ ধ্রুবক এবং ত্বরণ } a = \dfrac{dv}{dt}\right)$

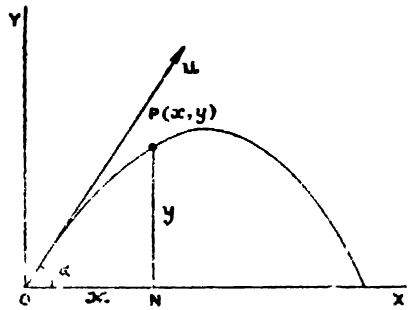
$\therefore \; F = cma$

এখন যদি আমরা মনে করি যে একক ভরের উপর ক্রিয়া করে একক ত্বরণ সৃষ্টি করে যে বল তাহাই বলের একক, অর্থাৎ $F = 1$, যখন $m = 1$, এবং $a = 1$ তাহলে $c = 1$, অতএব বলের এককের সংজ্ঞা অনুযায়ী আমরা পাই $F = ma$ বা বল = ভর × ত্বরণ ইহাকে বলা হয় বলের মান নির্দেশক সমীকরণ।

14.08 সবেগে অভিক্ষিপ্ত বস্তুর অবস্থান ও বেগ।

মনে করা যাক একটি বস্তুকণাকে O বিন্দু থেকে u গতিবেগ দিয়া এমনভাবে অভিক্ষেপন করা হল যাতে উহা ভূমির (horizon) সহিত α কোণ সৃষ্টি করে। মনে

করি O বিন্দু থেকে গতিবেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশদ্বয় যথাক্রমে X এবং Y অক্ষের উপর। এখন মনে করা যাক t সময়ের সাপেক্ষে বস্তুকণাটির অবস্থান $P(x, y)$.



এবার যেহেতু এখানে কোন অনুভূমিক ত্বরণ নাই, সেহেতু বস্তুকণাটির গতিবেগের অনুভূমিক অংশটি সর্বদা স্থির থাকবে এবং উহার প্রাথমিক গতিবেগ $u \cos \alpha$ এর সমান হবে। অতএব, $x = \cos \alpha \cdot t$ ... ... (1)

আবার গতিবেগের প্রাথমিক উল্লম্ব অংশটুকুর মান $u \sin \alpha$ এবং উল্লম্ব দিকেই অভিকর্ষজনিত ত্বরণ $(-g)$।

$\therefore \quad y = u \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ ... ... (2)*

এখন (1) এবং (2) নং থেকে পাওয়া যায় যথাক্রমে

$$\left.\begin{array}{l} x = u \cos \alpha \cdot t \\ \dfrac{dx}{dt} = u \cos \alpha \end{array}\right\} \text{ এবং } \begin{array}{l} y = u \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \therefore \dfrac{dy}{dt} = u \sin \alpha - gt \end{array}$$

$\therefore$ লব্ধি বেগ (resulting velocity)

$$V = \sqrt{\left\{\frac{dx}{dt}\right\}^2 + \left\{\frac{dy}{dt}\right\}^2} = \sqrt{(u \cos \alpha)^2 + (u \sin \alpha - gt)^2}$$

$$= \sqrt{1 + (gt)^2 - 2ugt \sin \alpha}\ .$$

* এখানে $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ সূত্রটির সাহায্য নেওয়া হয়েছে। কলনবিদ্যার অন্তরকল সমীকরণের (differential equation) সাহায্যে গতিবিজ্ঞানের নিম্নলিখিত সূত্রগুলি

(i) $v = u + ft$

(ii) $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

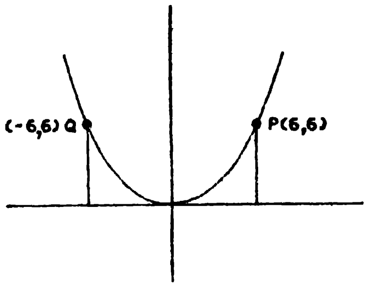
(iii) $v^2 = u^2 + 2fs$

(iv) $s_t = u + \frac{1}{2}f(2t-1)$

সহজেই প্রমাণ করা যায়। এইসব আলোচনা আমরা কলনবিদ্যার দ্বিতীয়ভাগে বিশদভাবে করব।

উদাহরণ 1 যদি একটি বিন্দু $6y=x^2$ এই অধিবৃত্তের উপর এমনভাবে বিচরণশীল হয় যাতে, যখন $x=6$, ভুজটি 2 ft/sec. হারে বর্ধিত হতে থাকে ; তবে এই সময়ে কোটি (ordinate) কি হারে বর্ধিত হবে তাহা বাহির কর।

উত্তর ঃ অধিবৃত্তের সমীকরণটিকে সময় (t) সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়,



$$6y=x^2$$

$$\therefore \quad 6\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}.$$

বা $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{dx}{dt}$. সুতরাং আমরা বলতে পারি যে অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দুতে, কোটির (ordinate) পরিবর্তনের হার $=\dfrac{x}{3}\times$ ভুজের (abscissa) পরিবর্তনের হার

সুতবাং যখন $x=6$, তখন $\dfrac{dx}{dt}=2$ ft/sec.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=\frac{6}{3}\times 2=4 \text{ ft/sec.}$$

সুতরাং লক্ষ্য করা যেতে পারা যায় যে $P(6, 6)$ বিন্দুটিতে কোটি ভুজের চেয়ে দ্বিগুণ ভাবে বর্ধিত হয়।

উদাহরণ 2. t সেকেণ্ড সময়ে একটি গতিশীল কণার অবস্থান

$x=a\cos\mu t,\ y=a\cos\mu t$; প্রমাণ কর ত্বরণ $=\dfrac{(\text{বেগ})^2}{a}$.

উত্তর ঃ বেগ $=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=a\mu$, ত্বরণ $=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=a\mu^2$

$$\therefore \quad \text{ত্বরণ}=a\mu^2=(a\mu)^2/a=(\text{বেগ})^2/a.$$

বিবিধ অনুশীলনী 14

1. চলমান একটি বস্তুকণার কোন সময় অতিক্রান্ত দূরত্ব নিম্নলিখিত সমীকরণ $s = at^2 + bt + c$ সাহায্যে দেওয়া হলে দেখাও যে

$$4a(s-c) = v^2 - b^2$$

যখন বস্তুকণার t সময়ে দূরত্ব s এবং a, b, c ধ্রুবক।

2. যদি $s = 9t^2 - t^3 - 4$ হয়, তবে বস্তুকণার স্থির অবস্থা আসার পূর্বে কত দূরত্ব অতিক্রান্ত হয়েছে নির্ণয় কর। [উত্তর : দূরত্ব = 104 একক]

3. যদি $s = t^3 - 9t^2 + 24t$ হয়, তবে 5 সেকেণ্ডে বস্তুকণার দূরত্ব নির্ণয় কর। [উত্তর : দূরত্ব = 28 একক]

4. যদি $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 4$ হয়, তবে বস্তুকণার স্থির অবস্থা আসার পূর্বে কত দূরত্ব অতিক্রান্ত হয়েছে নির্ণয় কর। [উত্তর : 5 একক]

5. যদি $s^2 = at^2 + 2bt + c$ হয়, তবে দেখাও যে বস্তুর ত্বরণ $= ks^{-3}$, k একটি ধ্রুবক।

6. একটি বস্তুকণা স্থির অবস্থা থেকে যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বৃত্তাকার পথে নিম্নলিখিত নিয়মে

$$\theta = \frac{t^3}{125} - \frac{t}{5} \quad (\theta \text{ রেডিয়ান মাপে প্রকাশিত})$$

ঘুরতে থাকে তবে দেখাও যে 10 সেকেণ্ড পরে কৌণিক দূরত্ব = 6 রেডিয়ান, কৌণিক বেগ = $\frac{11}{5}$ রেডিয়ান/সেকেণ্ড এবং কৌণিক ত্বরণ = $\frac{12}{25}$ রেডিয়ান/সেকেণ্ড^2.

7. চলমান একটি বস্তুকণার অবস্থান যদি নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা

$$x = a\cos t + b,\ y = a\sin t + c,$$

প্রকাশিত হয় তবে দেখাও যে উহার বেগ ধ্রুবক, যেখানে a, b, c ধ্রুবক।

8. যদি $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ হয়, তবে দেখাও যে $t > 3$ হলে বেগ ও ত্বরণ ধনাত্মক।

9. যদি $s = 27 - 36t + 12t^2 - t^3$ হয়, তবে দেখাও যে মাত্র 4 সেকেণ্ড পর্যন্ত বস্তুকণা ধনাত্মক দিকে চলমান হয়। যখন বস্তুকণার বেগ শূন্য হয় তখন ত্বরণ নির্ণয় কর। [উত্তর : ± 12 একক]

10. যদি $s = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ হয়, তবে দেখাও যে 2·5 সেকেণ্ডে বস্তুকণার গতির দিক পরিবর্তিত হবে।

11. একটি বস্তুকণা একটি সরলরেখার উপর গতিশীল এবং উহার উপরিস্থিত নির্দিষ্ট একটি O বিন্দু থেকে যে কোন t সেকেণ্ড সময়ে উহার x cm. দূরত্ব নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত :

$$x = t^4 - 10t^3 + 24t^2 + 40t + 6$$

কখন বস্তুকণার গতিবেগ ন্যূনতম তা নির্ণয় কর। [উত্তর : $t = 4$]

পঞ্চদশ অধ্যায়

অপরাপর প্রয়োগ ঃ অর্থনীতি ও জীববিজ্ঞানে

15.01 প্রাথমিক মন্তব্য :

দ্বিতীয় খণ্ডের পূর্বোক্ত অধ্যায়গুলিতে আমরা জ্যামিতি এবং গতিবিজ্ঞানে অন্তব-কলনবিদ্যাব প্রয়োগ সম্বন্ধে আলোচনা করেছি। মানুষের প্রাকৃতিক রহস্য উন্মোচনের অনুসন্ধিৎসা থেকে যে বিজ্ঞানের সৃষ্টি সেই বিজ্ঞানের বিস্তীর্ণ শাখায় কলন-বিদ্যার প্রচুর প্রয়োগ আছে। প্রকৃতি-বিজ্ঞানে (Natural Science) যেমন কলন-বিদ্যার প্রয়োগ আছে, জীববিজ্ঞানে (Biological Science) তেমনি কলনবিদ্যার সাহায্যে ভৌত জীববিজ্ঞান (Physical biology) আলোচনা করা হয়। তাছাড়া মানুষের ব্যবহারিক জীবনে বহু সমস্যায় গণিতেব সাহায্যে সমাধানে কলনবিদ্যার বহুল প্রয়োগ দেখা যায। তাই বর্তমান অধ্যায়ে আমরা অর্থনীতি ও জীববিজ্ঞানের ক্ষেত্রে অন্তর-কলনবিদ্যার কিছু কিছু প্রয়োগের কথা বলব। এই গ্রন্থের ক্ষুদ্র পরিসরে অন্তরকলন-বিদ্যার সব প্রয়োগ আলোচনা করা সম্ভবপর নয়, সেজন্য অপরাপর প্রযোগের দৃষ্টান্ত-স্বরূপ আমরা অর্থনীতি ও জীববিজ্ঞান বিষয় দুটিকে গ্রহণ করলাম।

15.02 অর্থনীতির কিছু প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

অর্থনীতি একটি বৈশ্লেষিক বিষয়—যেখানে সংখ্যা দ্বারা পরিমেয় বস্তুসমূহের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কের বা গৃহীত সম্পর্কের আলোচনা করা হয। বস্তুসমূহ বলতে বুঝায় মূল্য, সুদেব হার, আয়, উৎপাদন ব্যয়, বাজারে ক্রীত বা বিক্রিত দ্রব্যের পরিমাণ, ব্যবসা বা শিল্প প্রতিষ্ঠানে উৎপাদনের উপাদানের ব্যবহৃত পরিমাণ ইত্যাদি।

এখন সাধারণভাবে যদি একটি নির্দিষ্ট দ্রব্যেব (মনে কর X এর) বাজার দর p একক হয় এবং বাজারে চাহিদা অনুযায়ী X দ্রব্যের পরিমাণ x একক হয়, তবে x রাশিটি p রাশির একটি একক মানবিশিষ্ট (Single valued) ফাংশন; সুতরাং কলন-বিদ্যার ভাষায় লেখা যায়

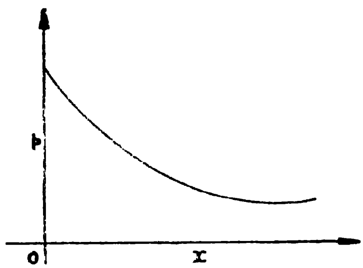
$$x = \phi(p)$$

এখন $x = \phi(p)$ ফাংশনকে অর্থনীতিতে X এর **চাহিদা ফাংশন** (demand function) বলে। স্পষ্টতঃই x এবং p শুধুমাত্র ধনাত্মক। যদিও এই চাহিদা ফাংশন কতকগুলি উপাদানের উপর নির্ভর করে—যেমন দ্রব্য-ব্যবহারকারী ব্যক্তির সংখ্যা

(number of consumers), তাদের আয়, তাদের রুচি (tastes) এবং অপরাপর দ্রব্যাদির মূল্য ; তথাপি একটি চাহিদা ফাংশনের ক্ষেত্রে এই উপাদানগুলি বা গণিতের ভাষায় এই প্রমাত্রাগুলি (parameters) জানা থাকে বলে তারা ধ্রুবক। চাহিদা ফাংশনের লেখচিত্রকে বলা হয় **চাহিদা বক্ররেখা** (demand curve)। উপরোক্ত চাহিদা ফাংশনকে বিলোম (inverse) ফাংশনের ধারণার সাহায্যে লেখা যায়

$$p=\psi(x)$$

সাংসারিক অভিজ্ঞতা থেকে বলা যায় যে দ্রব্যের বাজার দর বাড়লে সংসারের কর্তা দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ কমাইয়া দেন—এক্ষেত্রে দেখা যায় চাহিদা ফাংশন একটি একদিষ্ট অবরোহী (monotone descending) ফাংশন, সুতরাং চাহিদা ফাংশনের বিলোম ফাংশনটিও একদিষ্ট অবরোহী। এই ব্যাপারে চাহিদা বক্ররেখা নিম্নরূপ আকার ধারণ করতে পারে



অনেক সময় চাহিদা ফাংশনটি দ্রবমূল্যের কোন এক অন্তরালে (interval) আসন্ন মানের ক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট ফাংশন দ্বারা প্রকাশ করা হয় ; এরূপ নির্দিষ্ট ফাংশনকে **চাহিদা নিয়ম** (demand law) বলে। যেমন

$$p=a-bx,\ p=a-bx^2,\ \text{ইত্যাদি।}$$

এখন $R=xp$ কে **মোট আয়** (total revenue) বলে। সুতরাং

$$R=p\phi(p)\ \text{অথবা}\ R=x\psi(x).$$

$R=x\psi(x)$ এইভাবে মোট আয় অধিকাংশ ক্ষেত্রে প্রকাশ করা হয় এবং এই ফাংশনকে চাহিদা নিয়মের **মোট আয় ফাংশন** (total revenue function) বলে।

যেহেতু $p=\dfrac{R}{x}$, সেহেতু বাজার দর p কে **গড় আয়** (average revenue) বলে।

কোন ব্যবসা বা শিল্পপ্রতিষ্ঠান চেষ্টা করেন সবচেয়ে কমসম্ভব মোট খরচে দ্রব্য যাতে উৎপাদন করা যায়। যদি X দ্রব্যের x পরিমাণ উৎপাদ (output) কমসম্ভব

মোট খরচ Π তে পাওয়া যায়, তবে Π রাশিটি x এর একটি ফাংশন। সুতরাং লেখা যায়

$$\Pi = F(x)$$

এই ফাংশনকে **মোট খরচ ফাংশন** (total cost function) বলে। স্পষ্টতঃই x এবং Π ধনাত্মক। মোট খরচ ফাংশনের লেখচিত্রকে বলা হয় **মোট খরচ বক্ররেখা** (total cost curve)।

$\frac{\Pi}{x}(=\pi)$ কে **গড় খরচ** (average cost বলে)। যদি $\pi = F(x)$ হয়, তবে

$$f(x) = \frac{\Pi}{x} = \frac{F(x)}{x}$$

এখানে $f\ (x) = \frac{F(x)}{x}$ কে **গড় খরচ ফাংশন** (average cost function) বলে।

উদাহরণ : যদি মোট খরচ $\Pi = ax^2 + bx + c$ হয়, তবে গড় খরচ

$$\pi = \frac{\Pi}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$$

সুতরাং $\pi \to \infty$, যখন $x \to o$ বা $x \to \infty$ অর্থাৎ যখন উৎপাদ খুব কম বা খুব বেশী তখন গড় খরচ খুব বেশী।

15.03 অর্থনীতিতে অন্তরকলনের প্রয়োগ

(A) আমরা জানি মোট আয় ফাংশন $R = x\psi\ (x)$, যেখানে $p = \psi(x)$; এখন মোট আয় ফাংশনের উভয় পক্ষের x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাওয়া যায়

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{x\psi(x)\right\}$$

$$= \psi(x) + x\psi'(x)$$

$\frac{dR}{dx}$ কে অর্থনীতিতে x উৎপাদে **প্রান্তীয় আয়** (marginal revenue) বলে।

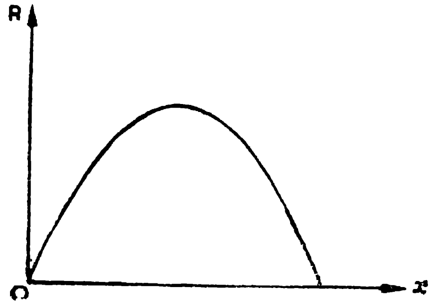
উদাহরণ : যদি চাহিদা নিয়মকে নিম্নলিখিত রৈখিক (linear) ফাংশন দ্বারা প্রকাশ করা হয় :

$$p = a - bx$$

তবে $R = xp = ax - bx^2$

$$\therefore\ \frac{dR}{dx} = a - 2bx$$

তাহলে মোট আয় বক্ররেখাটি একটি অধিবৃত্ত (parapola) ; কিন্তু প্রান্তিয় আয় বক্ররেখাটি একটি সরলরেখা।



উদাহরণ : যদি মোট খরচ ফাংসন $\Pi = ax^2 + bx + c$

হয়, তবে গড় খরচ $\pi = \frac{\Pi}{x} = ax + b + \frac{c}{x}$

এবং প্রান্তীয় খরচ $= \frac{d\Pi}{dx} = 2ax + b$

(*B*) এখন অর্থনীতিতে কোন প্রতিষ্ঠানের একচেটিয়া (সুবিধাভোগী) অধিকারের কথা আলোচনা করা যাক। মনে কর প্রতিষ্ঠানের x উৎপাদ থেকে **গ্রাস আয়** (gross revenue) $R = x\psi(x)$ এবং মোট খরচ $\Pi = F(x)$; তাহলে প্রতিষ্ঠানের **নীট আয়** (net revenue) $= R - \Pi$, উহা x এর একটি ফাংশন : এখন প্রতিষ্ঠান যদি পরম (maximum) নীট আয় পেতে চায়, তাহলে $R - \Pi$ ফাংশনটির পরম মানের সর্ত কি ?

অন্তবকলনবিদ্যা থেকে আমরা জানি যে $y = f(x)$ ফাংশনটির ক্ষেত্রে যদি কোন $x = x_0$ মানের জন্য $f'(x_0) = 0$ এবং $f''(x_0) < 0$ হয়, তবে $f(x)$ ফাংশনটি $x = x_0$ বিন্দুতে একটি পরম মান ধারণ করে।

তাহলে $(R - \Pi)$ ফাংশনটির ক্ষেত্রে প্রথমে আমাদের

$$\frac{d}{dx}(R - \Pi) = 0 \text{ বা } \frac{dR}{dx} = \frac{d\Pi}{dx} \quad \cdots \quad (1)$$

সমীকরণটি সমাধান করে দেখতে হবে x. এর মান কত এবং সেই x এর মান বা মানগুলির জন্য যদি নিম্নলিখিত অসমতাটি

$$\frac{d^2}{dx^2}(R - \Pi) < 0$$

অথবা $\frac{d^2 R}{dx^2} < \frac{d^2 \Pi}{dx^2}$ ... (2)

সিদ্ধ হয়, তবে প্রতিষ্ঠানের সেই x উৎপাদে পরম নীট আয় হবে। উপরোক্ত আলোচনাটি সেই সব প্রতিষ্ঠানের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য যারা উৎপাদ (x) স্থিরীকৃত করে রাখবে। যদি প্রতিষ্ঠান বাজার দরকে (p) স্থিরীকৃত করে রাখে তবে

$$R = xp = p\phi(p)$$

এবং $\Pi = F(x) = F\{\phi(p)\}$;

সুতরাং p বাজার দরে নীট আয় $R - \Pi = p\phi(p) - F\{\phi(p)\}$

এক্ষেত্রে নীট আয় পরম হবে যদি

$$\frac{d}{dp}(R - \Pi) = 0 \quad \ldots \quad (0)$$

এবং $\frac{d^2}{dp^2}(R - \Pi) < 0$ ... (4)

হয়। এখন (3) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dp}\{p\phi(p)\} - \frac{d\Pi}{dp} = 0$$

অথবা $\phi(p) + p\phi'(p) - \frac{d\Pi}{dx}\frac{dx}{dp} = 0$

অথবা $\phi(p) + p\phi'(p) - \frac{d\Pi}{dx}\phi'(p)$; [$\because$ $x = \phi(p)$]

অথবা $\phi(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\phi'(p) = 0$ ... (5)

এখন (4) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{d}{dp}\left\{\frac{d}{dp}(R - \pi)\right\} < 0$$

পূর্বের মত আমরা পাই

$$\frac{d}{dp}(R - \Pi) = \phi(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\phi'(p)$$

$$\therefore \frac{d}{dp}\left\{\phi(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\phi'(p)\right\} < 0$$

বা $\phi'(p) + \left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right)\phi''(p) + \phi'(p)\frac{d}{dp}\left(p - \frac{d\Pi}{dx}\right) < 0$

$$\text{বা}\quad \phi'(p)+\left(p-\frac{d\Pi}{dx}\right)\phi''(p)+\phi'(p)\left\{1-\frac{d^2\Pi}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dp}\right\}<0$$

$$\text{বা}\quad \left\{2-\phi'(p)\frac{d^2\Pi}{dx^2}\right\}\phi'(p)+\left(p-\frac{d\Pi}{dx}\right)\phi''(p)<0 \quad \ldots(6)$$

$$[\because \quad x=\phi(p)]$$

(1) – (2) ও (5) – (6) অর্থনীতিতে দুইটি সুবিধাভোগী সমস্যা (monopoly problem) নামে পরিচিত।*

উদাহরণ ঃ যদি একটি একচেটিয়া অধিকারী প্রতিষ্ঠানের মোট খরচ $\Pi=ax^2+bx+c$ হয় এবং চাহিদা নিয়ম $p=\beta-\alpha x^2$ হয় তবে দেখাও যে পরম নীট আয়ের ক্ষেত্রে উৎপাদ $x=\dfrac{\sqrt{a^2+3\alpha(\beta-b)}-a}{3\alpha}$

সমাধান ঃ এখানে নীট আয় $= R-\Pi$

$$= xp-\Pi$$

$$= \beta x-\alpha x^3-ax^2-bx-c$$

$$= (\beta-b)x-ax^2-\alpha x^3-c$$

এখানে নীট আয়ের পরম মানের জন্য আবশ্যকীয় সর্ত

$$\frac{d}{dx}(R-\Pi)=0$$

$$\text{অর্থাৎ}\quad (\beta-b)-2ax-3\alpha x^2=0$$

$$\text{বা}\quad 3\alpha x^2+2ax+(b-\beta)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-12\alpha(b-\beta)}}{6\alpha}$$

$$=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+3\alpha(\beta-b)}}{3\alpha}.$$

যেহেতু উৎপাদ x ঋণাত্মক হতে পারে না, সেহেতু

$$x=\frac{\sqrt{a^2+3\alpha(\beta-b)}-a}{3\alpha}=\lambda \text{ (মনে কর)}$$

(মনে করি করণীর অন্তর্গত অংশ ধনাত্মক)

---

* **monopoly problem** সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা এস. কে. চ্যাটার্জীর লেখা **'A note on monopoly problems in economic theory' (The Economic Studies Vol. 15 (1975), 285-287)** প্রবন্ধটি পড়া যেতে পারে।

এখন এই উৎপাদে নীট আয় পরম হবে যদি x এর এই মানের জন্য নিম্নলিখিত পর্যাপ্ত সর্ত সিদ্ধ হয়

$$\frac{d^2(R-\Pi)}{dx^2}<0$$

এখানে $$\frac{d^2(R-\Pi)}{dx^2}=-6\alpha x-2a$$

$$\therefore \quad \left.\frac{d^2(R-\Pi)}{dx^2}\right|_{x=\lambda}$$
$$=-6\alpha\lambda-2a$$
$$=-2\left(\sqrt{\alpha^2+3\alpha(\Pi-b)}-a\right)-2a$$
$$=-2\sqrt{\alpha^2+3\alpha(\beta-b)}<0$$

সুতরাং নীট আয়ের পরম মানের জন্য x যথার্থই λ এর সমান।

(C) অর্থনীতিতে 'স্থিতিস্থাপকতা' (elasticity) কথাটির খুব প্রয়োগ আছে। যদি চাহিদা নিযম $x=\phi(p)$ হয়, তবে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা $(\eta)=-\frac{p}{\Pi}\frac{dx}{dp}$ $=-\frac{d\,(\log x)}{d\,(\log p)}$.

অনুরূপভাবে মোট খরচের স্থিতিস্থাপকতা $(k)=\frac{x}{\Pi}\frac{d\Pi}{dx}=\frac{d\,(\log \Pi)}{d\,(\log x)}$, যেখানে $\Pi=F(x)$.

এখন যেহেতু $x=\phi(p)$ বা $p=\psi(x)$ এবং $R=xp=x\psi(x)$

$$\therefore \quad \frac{dR}{dx}=p\left(1+\frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\right)$$
$$=\quad p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$$

সুতরাং x উৎপাদে প্রান্তীয় আয় $\frac{dR}{dx}=p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$;

এই সমতাটি অর্থনীতিতে খুবই প্রযোজনীয়।

এখন যদি নির্ধারিত মূল্য ও চাহিদায় $\eta>1$ হয়, তবে $\frac{dR}{dx}>0$ অর্থাৎ নির্ধারিত চাহিদার ক্ষুদ্র অন্তরালে মোট আয় ফাংশনটি একটি আরোহী ফাংশন অর্থাৎ x যত বাড়ে মোট আয় তত বাড়ে ; ইহাই স্থিতিস্থাপক চাহিদার ব্যাপার।

কিন্তু যদি নির্ধারিত মূল্য ও চাহিদায় $\eta=1$ হয়, তবে $\frac{dR}{dx}=0$ অর্থাৎ মোট আয় একটি ধ্রুবক (অর্থাৎ পরম)।

আবার যদি নির্ধারিত মূল্য ও চাহিদায় $\eta<1$ হয়, তবে $\frac{dR}{dx}<0$ অর্থাৎ নির্ধারিত চাহিদার ক্ষুদ্র অন্তরালে মোট আয় ফাংশনটি একটি অবরোহী ফাংশন অর্থাৎ x যত বাড়ে মোট আয় তত কমে। ইহা অস্থিতিস্থাপক চাহিদার ব্যাপার।

অর্থনীতিতে চাহিদার স্বাভাবিক সর্ত (Normal condition of demand) এই যে প্রথমে মোট আয় উৎপাদের বৃদ্ধির সঙ্গে বর্ধিত হয় ($\eta>1$), তারপর স্থির থাকে ($\eta=1$) এবং তারপর মোট আয় উৎপাদের বৃদ্ধির সঙ্গে হ্রাস পায় ($\eta<1$).

উদাহরণ : মনে কর $p=a-bx$

এখানে $\eta=-\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}=-\frac{p}{x}\cdot\Big/(-b)=\frac{p}{px}=\frac{a-bx}{bx}$

$$\therefore\quad \frac{dR}{dx}=p\left(1-\frac{1}{\eta}\right)$$

$$=p\left(1-\frac{bx}{a-bx}\right)$$

$$=p\cdot\frac{a-2bx}{a-bx}$$

$$=a-2bx$$

এখন $\eta>1$ হলে $\frac{a-bx}{bx}>1$ অর্থাৎ $a>2bx$; সুতরাং $\frac{dR}{dx}>0$

কিন্তু $\eta=1$ হলে $a=2bx$; সুতরাং $\frac{dR}{dx}=0$

পুনরায় $\eta<1$ হলে $a<2bx$; সুতরাং $\frac{dR}{dx}<0$

অতএব x যখন $\frac{a}{2b}$ থেকে কম হয়ে ক্রমাগত বৃদ্ধি পায় তখন মোট আয় বর্ধিত হয়, $x=\frac{a}{2b}$ হলে মোট আয় স্থির হয় (অর্থাৎ পরম মান ধারণ করে) এবং $x>\frac{R}{2b}$ হলে মোট আয় হ্রাস পায়।

সুতরাং $p=a-bx$ চাহিদা নিয়মটি অর্থনীতিতে চাহিদার স্বাভাবিক আকার।

15.04 জীববিজ্ঞানের প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা

বৃদ্ধি সজীব বস্তুর বৈশিষ্ট্য। অ্যানাবলিজম বা গঠনাত্মক বিপাকীয় কার্য্য যখন ক্যাটাবলিজম বা ধ্বংসাত্মক বিপাকীয় কার্য্যের হারকে অতিক্রম করে তখন নানাবিধ খাদ্যবস্তু শোষণ করে প্রোটোপ্লাজম পুষ্ট হয়। ফলে দেহের আয়তন ও ওজন বাড়ে এবং ক্রমাগত কোষ বিভাজন দ্বারা নূতন কোষ গঠিত হয়। এই পুষ্টি দেহের অভ্যন্তর থেকেই হয়। সুতরাং গঠনমূলক বিপাকীয় কার্য্যের প্রভাবে প্রোটোপ্লাজমের পুষ্টির ফলে কোষ বিভাজন দ্বারা জীবের আয়তন, আকৃতি ও শুষ্ক ওজনের (দেহস্থ জল বাদ দিয়ে ওজন) স্থায়ী পরিবর্তনকে বৃদ্ধি (Growth) বলা হয়।

জীব বা উদ্ভিদের বৃদ্ধি সবসময় সমানভাবে হয় না। লেখচিত্রে সামগ্রিক বৃদ্ধির হার আঁকলে দেখা যায় যে সচরাচর জন্মের (বা অঙ্কুরোদ্গমের) পরে বৃদ্ধির হার খুব অল্প থাকে, কিন্তু ক্রমে উহা বর্দ্ধিত হয়ে সর্ব্বোচ্চ মানে পৌঁছায়। এরপর বৃদ্ধির হার আবার কমতে থাকে এবং শেষে বৃদ্ধি প্রায় বন্ধ হয়ে যায়। জন্মের বা অঙ্কুরোদ্গমের সময় থেকে বৃদ্ধি বন্ধ হওয়া পর্য্যন্ত বৃদ্ধির ও সময়ের অনুপাতের লেখ অনেকটা ইংরেজী 'ƨ' (উল্টা S) অক্ষরের মতো। বৃদ্ধির এই সময়কে বিজ্ঞানী স্যাকৃস মুখ্য বৃদ্ধিকাল নাম দিয়াছেন।

এই জীবের বৃদ্ধি বা জনসংখ্যার বৃদ্ধি বা রোগের জীবাণুর বৃদ্ধি সম্পর্কে আজকাল ভৌত জীববিজ্ঞানে আলোচনা করা হয়।

15.05 জীববিজ্ঞানে অন্তরকলনবিদ্যার প্রয়োগ

জীবের বৃদ্ধির হার কলনবিদ্যার ভাষায় বলা যায়—সময়ের সাপেক্ষে দেহের ভরের বৃদ্ধির হার অর্থাৎ $\frac{dm}{dt}$; আবার সময়ের সাপেক্ষে ঘনত্বের বৃদ্ধির হারকে কলনবিদ্যায় লেখা হয় $\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{v}\right)$; অবশ্য কয়েকটি সর্তের উপর বৃদ্ধি নির্ভর করে।

(A) সহজ উদাহরণ হিসাবে জনসংখ্যার আলোচনায় আসা যাক। জনবৃদ্ধির ক্ষেত্রে যদিও কতকগুলি সর্ত প্রয়োজন, তথাপি জনসংখ্যাকে একটি একক বস্তু x ধরলে জনসংখ্যা বৃদ্ধির হারকে লেখা যেতে পারে—

$$\frac{dx}{dt}=f(x).$$

এই সমীকরণের সমভার অবস্থার (condition of equilibrium) কথা চিন্তা করলে পাওয়া যায়

$$\frac{dx}{dt}=f(x)=0$$

স্পষ্টতাই শেষোক্ত সমীকরণের $x=0$ তে একটি বীজ থাকবে, কারণ জনসংখ্যা-বৃদ্ধির শুরুর জন্য অন্ততপক্ষে একজন মহিলা প্রয়োজন।

এখন টেলরের উপপাদ্যের সাহায্যে $f(x)$ এর বিস্তৃতি করলে পাওয়া যায়

$$\frac{dx}{dt}=f(x)=ax+bx^2+cx^3+\cdots$$

বিস্তৃতিতে x এর নিরপেক্ষ কোন পদ থাকতে পারে না, কারণ যদি থাকে তবে $\frac{dx}{dt}\neq 0$ যখন $x=0$.

$\frac{dx}{dt}=f(x)=0$ সমীকরণটির অন্ততপক্ষে আর একটি বীজ থাকবে, কারণ জনসংখ্যাবৃদ্ধির একটি উচ্চসীমা (upper linit) থাকা উচিত। এই সর্ত সিদ্ধ হতে গেলে সবচেয়ে সহজ অবস্থা নিম্নরূপ

$$\frac{dx}{dt}=ax+bx^2,$$

কারণ যদি মনে করি $x=\dfrac{-a/b}{1+e^{-at}}$

$$\text{তাহলে}\quad \frac{dx}{dt}=\frac{a}{b}\;\frac{1}{(1+e^{-at})^2}\cdot(-e^{-at})$$

$$=-\frac{a^2}{b}\,\frac{e^{-at}}{(1+e^{-at})^2}$$

$$=-\frac{a^2}{b}(1+e^{-at}-1)\Big/\left(1+e^{-at}\right)^2$$

$$=\frac{-a^2/b}{1+e^{-at}}+\frac{a^2/b}{(1+e^{-at})^2}$$

$$=ax+bx^2$$

সুতরাং দেখা গেল $\frac{dx}{dt}=ax+bx^2$ সমীকরণটির একটি বীজ

$$x=\frac{-a/b}{1+e^{-at}},$$

উহাই জনসংখ্যা এবং সময়ের একটি সম্পর্ক।

প্রকৃতপক্ষে পার্ল এবং রিডের গণনা হিসাবে 1790 থেকে 1910 সাল পর্যন্ত আমেরিকার জনসংখ্যার পরিমাণ

$$x=\frac{197273000}{1+e^{-0\cdot 03134t}}$$

(*B*) এখন জীববিজ্ঞানের কোন প্রজাতির সংখ্যা যদি N হয় এবং প্রত্যেকের গড় ভর যদি m হয় তবে মোট ভর $X=mN$.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt}=m\frac{dN}{dt}+N\frac{dm}{dt}.$$

m যদি ধ্রুবক হয়, তবে $\frac{dm}{dt}=0$; তাহলে পাওয়া যায়

$$\frac{dX}{dt}=m\frac{dN}{dt} \qquad \cdots \qquad (1)$$

প্রতি একক সময়ে মোট জন্ম-হার যদি B হয় এবং মোট মৃত্যু-হার যদি D হয় তবে

$$\frac{dN}{dt}=B-D \qquad \cdots \qquad (2)$$

প্রতি একক সময়ে মাথাপিছু জন্ম-হার এবং মৃত্যু-হার যথাক্রমে b এবং d হলে উপরোক্ত সমীকরণ নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়

$$\frac{dN}{dt}=(b-d)N \qquad \cdots \qquad (3)$$

(1) এবং (2) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{dX}{dt}=(B-D)m \qquad \cdots \qquad (4)$$

(1) এবং (3) থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{dX}{dt}=m(b-d)N \qquad \cdots \qquad (5)^*$$

বিবিধ প্রশ্নমালা 15

1. যদি চাহিদা নিয়মটি $p=\frac{a}{x}-c$ হয় (যেখানে a এবং c ধণাত্মক ধ্রুবক সংখ্যা), তবে চাহিদা বক্ররেখার প্রকৃতি কিরূপ ? দেখাও যে মূল্য যতই বর্ধিত হোক না কেন চাহিদা থাকবেই ।

* জীববিজ্ঞানের আর একটি প্রয়োগ সম্বন্ধে এস. কে. চ্যাটার্জী এবং এ. কে. চোঙদারের লেখা **'On an extension of classical Lotka-Volterra model of a predator-prey system' (Bangabasi Even. Coll. Mag. Vol. 17 (1981), E 8-10)** প্রবন্ধটি পড়া যেতে পারে ।

2. যদি খরচ ফাংশন $\Pi = ax^3 - bx^2 + cx$ হয় তবে গড় খরচ এবং প্রান্তীয় খরচ কত ? গড় খরচ এবং প্রান্তীয় খরচের প্রকৃতি কিরূপ ?

3. যদি একটি একচেটিয়া (সুবিধাভোগী) প্রতিষ্ঠানের মোট খরচ $\Pi = ax^3 - bx^2 + cx + d$ হয় এবং চাহিদা নিয়ম $p = \beta - \alpha x$ হয় তবে দেখাও পরম নীট আয়ের ক্ষেত্রে উৎপাদ নিম্নলিখিত সমীকরণের ধণাত্মক বীজ ;

$$3ax^2 - 2(b - \alpha)x - (\beta - c) = 0.$$

4. যদি $f(x)$ এর স্থিতিস্থাপকতা ϵ হয় তবে দেখাও যে $xf(x)$ এবং $\frac{f(x)}{x}$ এর স্থিতিস্থাপকতা যথাক্রমে $(\epsilon + 1)$ এবং $(\epsilon - 1)$.

এখন xe^x এবং xe^{-x} এর স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে নিম্নলিখিত চাহিদা নিয়মটি অর্থনীতিতে চাহিদার স্বাভাবিক আকার ঃ

$$p = \frac{a}{x+b} - c$$

6. সময়ের সাপেক্ষে যদি জনসংখ্যা $x = \dfrac{a/b}{\frac{x_0}{X_0}e^{-at} - 1}$ হয়, যেখানে $x = X_0$ যখন $t = 0$ এবং $x_0 = X_0 + \frac{a}{b}$, তবে দেখাও যে

$$\frac{dx}{dt} = ax + bx^2$$

7. t সময়ে কোন শহরের জনসংখ্যা যদি $f(t)$ হয়, তবে $f(t)$ কি t এর একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন ? কারণ উল্লেখ করে উত্তর দাও।

কলন-বিদ্যা

(প্রথম ভাগ)

পরিশিষ্ট ঃ বিবিধ আলোচনা

পরিশিষ্ট

(বিবিধ আলোচনা)

0.0.1 প্রাথমিক মন্তব্য :

দ্বিমাত্রিক দেশে বক্ররেখার প্রকৃতি ভালভাবে বুঝতে হলে বক্ররেখার লেখচিত্র অঙ্কন করার পদ্ধতি আয়ত্ব করা দরকার। কলনবিদ্যায় আমরা ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা, অন্তরকলনীয়তা, চরম মানের অস্তিত্ব, স্পর্শক ও অভিলম্ব, অভিসারক ইত্যাদি আলোচনা করেছি। এই ধারণাগুলি বক্ররেখার লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে খুবই দরকার। তাছাড়া আরও কতকগুলি ধর্ম আলোচনা না করলে বক্ররেখার সম্পূর্ণ ধারণা হয় না— যেমন বক্ররেখার অবতলতা (concavity), অসাধারণ বিন্দুর (singular point) অস্তিত্ব। বর্তমান আলোচনায় আমরা বক্ররেখার নূতন কয়েকটি ধর্মের কথা বলার সঙ্গে সঙ্গে লেখচিত্র অঙ্কন করার পদ্ধতি আলোচনা করব।

0.0.2 বক্ররেখার প্রতিসাম্য (Symmetry)

বক্ররেখাকে

(1) X-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম বলা হবে যদি y এর পরিবর্তে $-y$ বসালে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে ;

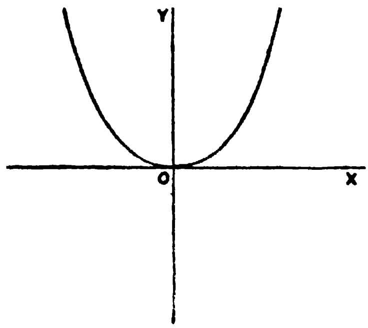
(2) Y-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম বলা হবে যদি x এর পরিবর্তে $-x$ বসালে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে ;

(3) মূলবিন্দু (0, 0) এর সাপেক্ষে প্রতিসম বলা হবে যদি x এবং y এর পরিবর্তে যথাক্রমে $-x$ এবং $-y$ বসালে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে ;

(4) $y=x$ সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম বলা হবে যদি x এবং y এর পরস্পর বিনিময়ে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে।

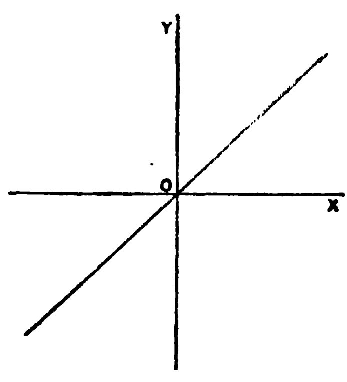
এখন মনে কর $y=f(x)$ ফাংসনটি যুগ্ম (even)। তাহলে যুগ্ম ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে জানি $f(-x)=f(x)$; সুতরাং x এর পরিবর্তে $-x$ বসালে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে। তাহলে (2) অনুসারে বক্ররেখাটি Y-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

উদাহরণস্বরূপ মনে কর $y=x^4$; আমরা জানি বক্ররেখাটি অধিবৃত্ত। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় বক্ররেখাটি Y-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম অর্থাৎ ফাংশনের সংজ্ঞায়

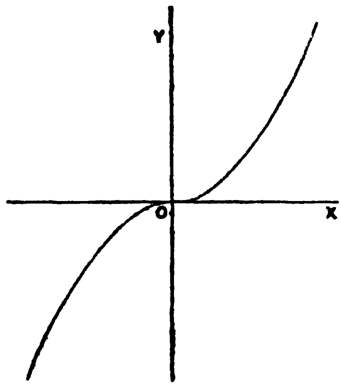


অঞ্চলে যদি শুধু x এর ধনাত্মক মানের জন্য লেখচিত্র অঙ্কন করা হয় তবে x এর ঋণাত্মক মানের জন্য অনুরূপ লেখচিত্র সহজেই ধারণা করা যায়।

আবার মনে কর $y=f(x)$ ফাংশনটি বিযুগ্ম (odd)। তাহলে বিযুগ্ম ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায় $f(-x)=-f(x)$; সুতরাং এখানে x এর পরিবর্তে $-x$ এবং y এর পরিবর্তে $-y$ বসালে বক্ররেখার সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে। তাহলে (3) অনুসারে বক্ররেখাটি মূলবিন্দু (0, 0) এর সাপেক্ষে প্রতিসম।



উদাহরণস্বরূপ মনে কর $y=x$; এখানে $y=x$ এর লেখচিত্র (0, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম, কারণ ইহা একটি বিযুগ্ম ফাংশন।



পুনরায় মনে কর $y = x^3$; এর লেখচিত্র সম্পর্কে পরে আরও আলোচনা করা হবে। শুধু এখানে মন্তব্য করা যেতে পারে এই লেখচিত্র (0, 0) বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসম।

অতিরিক্ত উদাহরণ :—

1. $y^2(1+x) = x^2(1-x)$ বক্ররেখাটি X-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।
2. $y^2(x^2-4) = x^4$ বক্ররেখাটি X-, Y- অক্ষরেখা এবং মূলবিন্দু (0, 0)এর সাপেক্ষ প্রতিসম।
3. $y = \sin x$ এর লেখচিত্র (0, 0) এর সাপেক্ষে প্রতিসম।
4. $y = \cos x$ এর লেখচিত্র Y- অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

0.0.3 বক্ররেখার X- ও Y- অক্ষরেখার সহিত ছেদবিন্দু

বক্ররেখার X- অক্ষরেখার সহিত ছেদবিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হলে বক্ররেখার সমীকরণে $y = 0$ বসিয়ে x এর মানগুলি সমাধান করতে হবে।

অনুরূপভাবে Y- অক্ষরেখার সহিত ছেদবিন্দুগুলি নির্ণয় করতে হলে বক্ররেখার সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে y এর মানগুলি সমাধান করতে হবে।

মনে কর বক্ররেখাটির সমীকরণ

$$y^2(1+x) = x^2(1-x)$$

এখানে X- অক্ষরেখার উপর ছেদবিন্দুগুলির জন্য $x = 0$ এবং $x = 1$; পুনরায় Y- অক্ষরেখার উপর ছেদবিন্দুর জন্য $y = 0$.

0.0.4 বক্ররেখার এলাকা

বক্ররেখার এলকোর ধারণা করার জন্য x এর অন্তরাল লক্ষ্য করতে হবে যেখানে বক্ররেখার অস্তিত্ব বিদ্যমান। অনুরূপভাবে y এর অঞ্চল লক্ষ্য করতে হবে।

উদাহরণস্বরূপ $y^2(1+x)=x^2(1-x)$ বক্ররেখাটির এলাকা $-1<x\leqslant 1$ এবং y এর সব মানের জন্য; কারণ যখন $x \notin (-1, 1]$ তখন y এর মান কাল্পনিক।

0.05 প্রথম বিভেদক সহগ এবং দ্বিতীয় বিভেদক সহগের প্রকৃতির সঙ্গে বক্ররেখার সম্বন্ধ :

বক্ররেখার অর্থাৎ ফাংশনের প্রথম বিভেদক সহগ এবং দ্বিতীয় বিভেদক সহগের প্রকৃতি থেকে অনেক মূল্যবান তত্ত্ব উদঘাটিত হয়। যেমন $\frac{dy}{dx}$ থেকে বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নতি (slope) জানা যায়। পুনরায় $[a, b]$ অন্তরালে যদি $y=f(x)$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন হয় এবং (a, b) অন্তরালে $f'(x)\equiv\frac{dy}{dx}>0$ হয়, তাহলে $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ একটি আরোহী ফাংশন; অপরপক্ষে যদি $\frac{dy}{dx}<0$ হয়, তাহলে $f(x)$ একটি অবরোহী ফাংশন। আবার যদি $f'(x_0)=0$ এবং $f''(x_0)=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}<0$ হয় তাহলে x_0 বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের একটি পরম মান নির্দেশ করে; অপরপক্ষে যদি $f'(x_0)=0$ এবং $f''(x_0)>0$ হয় তাহলে x_0 বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের একটি অবম মান নির্দেশ করে। সাধারণভাবে যদি

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(k_0)=0$$

এবং $\quad f^{(k)}(x_0)\neq 0$

হয়, তবে যখন k যুগ্ম তখন x_0 বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের একটি চরম মান নির্দেশ করে; কিন্তু যদি k বিযুগ্ম হয় তাহলে x_0 বিন্দুটি $f(x)$ ফাংশনের কোন চরম মান নির্দেশ করে না।

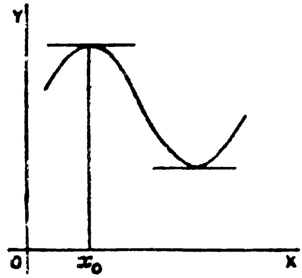
এখন মনে কর $y=f(x)$ কোন বক্ররেখার সমীকরণ। $(x_0, f(x_0))$ বিন্দুতে এই বক্ররেখার সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

অথবা $\quad \bar{y}=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$$\therefore\quad \bar{y}-y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

উপরের সমতা x-এর কোন মানের জন্য বক্ররেখা ও স্পর্শকের কোটির অন্তর প্রকাশ করে। এখন মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়



$$y-\bar{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$
$$=[f'(c)-f'(x_0)](x-x_0);$$

যেখানে c বিন্দুটি x_0 এবং x এর মধ্যে বিদ্যমান।

পুনরায় মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে পাওয়া যায়

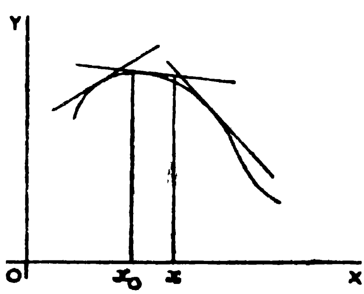
$$y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$$

যেখানে c_1 বিন্দুটি x_0 এবং c এর মধ্যে বিদ্যমান।

এখন মনে করা যাক (a, b) অন্তরালে সংজ্ঞিত $y=f(x)$ বক্ররেখা অন্তরালের সকল বিন্দুতে $f''(x)<0$ অসমতাটি সিদ্ধ করে তাহলে; তাহলে বক্ররেখার প্রকৃতি কিরূপ হবে?

প্রথমে $y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$ সমতাটিত $x>x_0$ এর ক্ষেত্রে $y-\bar{y}$ এর চিহ্ন আলোচনা করা হবে। যখন $x>x_0$ তখন $x_0<c<x$; যেহেতু $c-x_0>0$, $x-x_0>0$ এবং $f''(c_1)<0$, সেহেতু

$$y-\bar{y}<0.$$



এখন লক্ষ্য করা যেতে পারে যে, কোন $x>x_0$ এর জন্য বক্ররেখার উপর

বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং $(x_0, f(x_0))$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, \bar{y})$; সুতরাং যেহেতু $\bar{y}-y<0$, যে সকল বিন্দুর ভুজ $>x_0$ সেই সকল বিন্দু স্পর্শকের নীচে থাকবে।

পুনরায় যখন $x<x_0$, তখন $x<c<x_0$; তাহলে $x-x_0<0, c-x_0<0$ এবং $f''(c_1)<0$.

$$\therefore \quad \bar{y}-y<0.$$

অতএব $x<x_0$ এর জন্য বক্ররেখার বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং $(x_0, f(x_0))$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপব বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, \bar{y})$ এবং যেহেতু $y-\bar{y}<0$, আমরা লক্ষ্য করি, যে সকল বিন্দুর ভুজ $<x_0$ সেই সকল বিন্দু স্পর্শকের নীচে থাকবে। অর্থাৎ যখন $f'(x)<0, x \in (a, b)$, তখন (a, b) অন্তরালে বক্ররেখার উপর সকল বিন্দু (a, b) অন্তরালের মধ্যে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের নীচে থাকবে। এরূপ ক্ষেত্রে বলা হয় (a, b) অন্তরালে $y=f(x)$ বক্ররেখাটি উপরের দিকে **উত্তল** (convex up) বা নীচের দিকে **অবতল** (concave down).

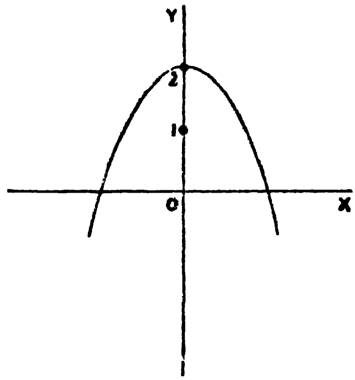
অতএব আমরা নিম্নলিখিতভাবে উপরোক্ত আলোচনার ফলটিকে প্রকাশ করতে পারি :

(1) যদি (a, b) অন্তরালের সকল বিন্দুতে $y=f(x)$ এর দ্বিতীয় বিভেদক সহগ ঋণাত্মক হয় অর্থাৎ $f\ (x)<0$ হয়, তবে $y=f(x)$ বক্ররেখাটি (a, b) অন্তরালে উপরের দিকে উত্তল বা নীচেব দিকে অবতল।

অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে

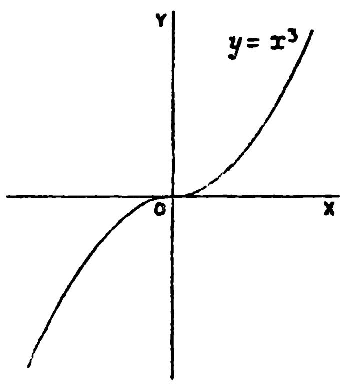
(2) যদি (α, β) অন্তরালের সকল বিন্দুতে $y=f(x)$ এর দ্বিতীয় বিভেদক সহগ ধনাত্মক হয় অর্থাৎ $f'(x)>0$ হয়, তবে $y=f(x)$ বক্ররেখাটি (a, b) অন্তরালে উপরের দিকে **অবতল** (concave up) বা নীচের দিকে **উত্তল** (convex down) অর্থাৎ (α, β) অন্তরালে বক্ররেখার উপর সকল বিন্দু (α, β) অন্তরালের মধ্যে যে কোন বিন্দুতে স্পর্শকের উপরে থাকবে।

উদাহরণ ঃ মনে কর $y = 2 - x^2$



এখানে $y'' = -2 < 0$, সকল x এর জন্য
অতএব বক্ররেখাটি সর্বত্র উপরের দিকে উত্তল।

উদাহরণ ঃ মনে কর $y = x^3$
এখানে $y'' = 6x$



তাহলে $y'' < 0$, যখন $x < 0$
এবং $y'' > 0$, যখন $x > 0$

অতএব যখন $x < 0$ বক্ররেখাটি উপরের দিকে উত্তল এবং যখন $x > 0$ বক্ররেখাটি উপরের দিকে অবতল।

মন্তব্য ঃ দ্বিতীয় উদাহরণে লক্ষ্য করার বিষয় এই যে বক্ররেখাটি $x = 0$ এর (অর্থাৎ (0, 0) এর) বামদিকে উপরের দিকে উত্তল এবং এবং ডানদিকে উপরের দিকে অবতল। তাহলে (0,0) বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল এবং অবতল অংশের মধ্যে বিরাজমান

অর্থাৎ এই বিন্দুটি বক্ররেখার উত্তল এবং অবতল অংশদ্বয়কে পৃথক করে দিয়েছে। এরূপ বিন্দুকে বক্ররেখার চ্যুতিবিন্দু (point of inflection) বলে। এই চ্যুতিবিন্দুতে স্পর্শক বক্ররেখাকে ছেদ করে, কারণ এক পার্শ্বে বক্ররেখার স্পর্শকের নীচে এবং অপর-পার্শ্বে বক্ররেখা স্পর্শকের উপরে থাকে।

চ্যুতিবিন্দুর অস্তিত্বের আবশ্যাকীয় সর্ত হিসাবে নিম্নলিখিত বিবৃতি উল্লেখযোগ্য :—

(3) মনে কর $y=f(x)$ একটি বক্ররেখা। এখন যদি $f''(a)=0$ হয় অথবা $f''(a)$ সান্তভাবে বিদ্যমান না হয় এবং $f''(x)$ এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয় যখন x এর মান a বিন্দু অতিক্রম করে যায়, তবে বক্ররেখার যে বিন্দুর ভুজ 'a' সেই বিন্দুটি চ্যুতিবিন্দু।

প্রমাণ :—(i) মনে কর $f'(x) < o$ যখন $x<a$ এবং $f'(x)>o$ যখন $x>a$; তাহলে যখন $x<a$, বক্ররেখাটি উপরের দিকে উত্তল এবং যখন $x>a$ তখন বক্ররেখাটি নীচের দিকে উত্তল। অতএব যে বিন্দুর ভুজ a' সেই বিন্দুটি চ্যুতিবিন্দু।

(ii) মনে কর $f''(x) > o$ যখন $x<b$ এবং $f'(x)<o$ যখন $x>b$; তাহলে যখন $x<b$, বক্ররেখাটি নীচের দিকে উত্তল এবং যখন $x>b$ বক্ররেখাটি উপরের দিকে উত্তল। অতএব যে বিন্দুর ভুজ 'b' সেই বিন্দুটি চ্যুতিবিন্দু।

উদাহরণ : মনে কর $y=e^{-x^2}$

এখানে $y'=-2xe^{-x^2}$

এবং $y''=2e^{-x^2}(2x^2-1).$

এখন y'' সর্বত্র বিদ্যমান। তাহলে $y''=0$ সমাধান করে পাওয়া যায়

$$x=\frac{-1}{\surd 2}, \frac{1}{\surd 2}.$$

লক্ষ্য করা যায়

যখন $x<-\frac{1}{\surd 2}$, তখন $y''>0$

এবং যখন $x>-\frac{1}{\surd 2}$, তখন $y''<o.$

সুতরাং যখন x এর মান $-\frac{1}{\surd 2}$ অতিক্রম করে তখন y'' এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয়। অতএব বক্ররেখার একটি চ্যুতিবিন্দু $\left(-\frac{1}{\surd 2}, e^{-\frac{1}{2}}\right).$

পুনরায় যখন $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. $y'' < 0$,

এবং যখন $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y'' > 0$.

অতএব বক্ররেখার আর একটি চ্যুতিবিন্দু $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \ e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

এখন লক্ষ্য করা যায়

যখন $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, বক্ররেখা উপরের দিকে অবতল,

যখন $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, বক্ররেখা নীচের দিকে অবতল,

এবং যখন $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$, বক্ররেখা উপর দিকের অবতল।

পুনরায় $y' = -2xe^{-x^2}$ থেকে সহজেই প্রতীয়মান হয়

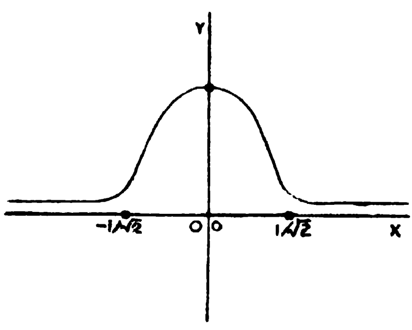
যখন $x < 0$, তখন $y' > 0$

যখন $x > 0$, তখন $y' < 0$

এবং যখন $x = 0$, তখন $y' = 0$.

$x = 0$ বিন্দুতে পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে ফাংশনের একটি পরম মান $(y = 1)$ আছে।

এখন উপরোক্ত আলোচনার ফলে ফাংশনটির লেখাচিত্র সহজেই অঙ্কন করা যেতে পারে



উদাহরণ : $y = \sqrt[3]{(x+2)}$

এখানে $y'' = \dfrac{-2/9}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$

এখানে $y''=0$ অসম্ভব ; y'' এর হরকে শূন্যের সহিত সমান করে দেখা যায় যখন $x=-2$ তখন y'' সান্তভাবে বিদ্যমান নয়। এখন $y''>0$ যখন $x<-2$ এবং $y''<0$ যখন $x>-2$; অতএব বক্ররেখার $(-2,0)$ একটি চ্যুতিবিন্দু। $(-2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শক Y অক্ষের সমান্তরাল, কারণ $x=-2$ তে y' এর মান অনন্ত।

0.06 অভিসারকের সাহায্যে বক্ররেখার প্রকৃতি নির্ণয়

আমরা জানি যে $y=f(x)$ বক্ররেখার ক্ষেত্রে যদি 'a' এমন একটি সংখ্যা থাকে যাতে

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$$

হয়, তাহলে $x=a$ সরলরেখা $y=f(x)$ বক্ররেখার একটি (উল্লম্ব) অভিসারক।

পুনরায় যদি

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1 \text{ (সান্ত)}$$

$$\text{এবং} \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1 \text{ (সান্ত)}$$

হয়, তাহলে $y=k_1x+b_1$ সরলরেখা $y=f(x)$ বক্ররেখার একটি (ডানদিকের তির্য্যক) অভিসারক ; যদি $k_1=0$ হয় তবে সেই অভিসারক ডানদিকের অনুভূমিক অভিসারক।

পুনরায় যদি

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2 \text{ (সান্ত)}$$

$$\text{এবং} \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2 \text{ (সান্ত)}$$

হয়, তাহলে $y=k_2x+b_2$ সরলরেখা $y=f(x)$ বক্ররেখার একটি (বামদিকের তির্য্যক) অভিসারক ; যদি $k_2=0$ হয় তবে এই অভিসারক বামদিকের অনুভূমিক অভিসারক ; ($f(x)$ ফাংশনটি একমানবিশিষ্ট)।

মনে কর $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}$

এখানে $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x)$ এর হরকে শূন্যের সহিত সমান করে পাওয়া যায়

$$x = -1 \text{ এবং } x = 1$$

উহারা বক্ররেখার দুইটি উল্লম্ব অভিসারক।

তির্য্যক অভিসারকের জন্য প্রথমে মনে করি $x \to +\infty$, তাহলে

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = 1$$

এবং $b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (y - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0$

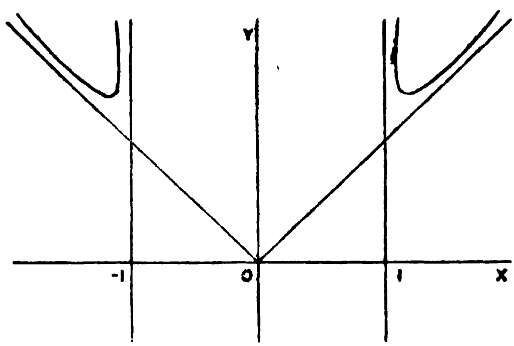
$\therefore\ y = x$ একটি ডানদিকের তির্য্যক অভিসারক।

অনুরূপভাবে যখন $x \to -\infty$, তখন দেখা যায়

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{y} = -1$$

এবং $b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (y + x) = 0$

$\therefore\ y = -x$ একটি বামদিকের তির্য্যক অভিসারক।



0.07 সমতল বক্ররেখার অসাধারণ বিন্দু

মনে কর কোন বক্ররেখার সমীকরণ $f(x, y) = 0$; আমরা জানি

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

সুতরাং f_x বা f_y এর অন্তত একটি যদি বক্ররেখার কোন বিন্দুতে যথা (x_0, y_0) তে শূন্য মান ধারণ না করে তবে $\dfrac{dy}{dx}$ বা $\dfrac{dx}{dy}$ সান্ত অর্থাৎ (x_0, y_0) বিন্দুতে বক্ররেখার একটি সুনির্দিষ্ট স্পর্শক বিদ্যমান। এরূপ (x_0, y_0) বিন্দুকে বক্ররেখার **সাধারণ বিন্দু** (ordinary point) বলে।

কিন্তু যদি (x_0, y_0) বিন্দু এমন হয় যেখানে

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=x_0}} \equiv f_x(x_0, y_0) = 0$$

এবং $$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \equiv f_y(x_0, y_0) = 0,$$

তবে (x_0, y_0) বিন্দুতে বক্ররেখার স্পর্শকের নতি নির্ণয় করা যায় না। এরূপ বিন্দুকে বক্ররেখার **অসাধারণ বিন্দু** (singular point) বলা হয়।

সংজ্ঞা : $f(x, y) = 0$ বক্ররেখার (x_0, y_0) বিন্দুকে অসাধারণ বিন্দু বলা হবে, যদি বিন্দুর স্থানাঙ্কদ্বয় নিম্নলিখিত তিনটি সমতা সিদ্ধ করে :

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

এখন যদি

$$A = f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$B = f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$C = f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$$

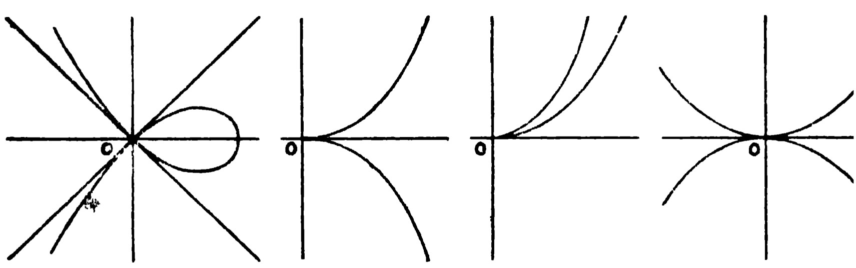
এবং $\Delta = AC - B^2$

হয়, তবে অসাধারণ বিন্দুগুলির নিম্নলিখিত শ্রেণীবিভাগ করা যায় :

(i) যদি $\Delta > 0$ হয়, তবে (x_0, y_0) বিন্দুটি একটি স্বতন্ত্র (isolated) অসাধারণ বিন্দু ;

(ii) যদি $\Delta < 0$ হয়, তবে (x_0, y_0) বিন্দুটি একটি পাতবিন্দু (nodal point or node or double point) ;

(iii) যদি $\Delta = 0$ হয়, তবে (x_0, y_0) বিন্দুটি একটি সুঁচাল বিন্দু (cusp) বা স্বতন্ত্র বিন্দু বা আঙটা বিন্দু (tacnode) হতে পারে।



পাতবিন্দু সুঁচালবিন্দু সুঁচালবিন্দু আঙটাবিন্দু

উদাহরণ : মনে কর $f(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$

এখানে $f_x = 2ax + 3x^2$

$f_y = -2y$

$f_x = 0$ এবং $f_y = 0$ সমাধান করে পাওয়া যায় $(0, 0)$ এবং $(-\frac{2}{3}a, 0)$; কিন্তু $(-\frac{2}{3}a, 0)$ বিন্দুটি বক্ররেখার উপর অবস্থিত নয় বলে একমাত্র অসাধারণ বিন্দু $(0, 0)$.

$$\text{এখন } f_{xx} = 2a + 6x\,; \quad \therefore \quad A = 2a$$
$$f_{xy} = 0 \quad ; \quad \therefore \quad B = 0$$
$$f_{yy} = -2 \quad ; \quad \therefore \quad C = -2$$
$$\therefore \quad \Delta = AC - B^2 = -4a$$

যদি $a > 0$ হয়, তবে $(0, 0)$ বিন্দুটি পাতবিন্দু

যদি $a < 0$ হয়, তবে $(0, 0)$ বিন্দুটি স্বতন্ত্র বিন্দু

যদি $a = 0$ হয়, তবে $(0, 0)$ বিন্দুটি সুঁচাল বিন্দু।

বিবিধ উদাহরণ

মনে কর বক্ররেখার সমীকরণ

$$y^2(1+x) = x^2(1-x)$$

এখানে বক্ররেখাটি X-অক্ষরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

X-অক্ষরেখার সহিত বক্ররেখার ছেদবিন্দুর জন্য $x = 0$ এবং $x = 1$;

Y-অক্ষরেখার সহিত বক্ররেখার ছেদবিন্দুর জন্য $y = 0$.

বক্ররেখার এলাকা $-1 < x \leqslant 1$ এবং y এর সকল মানের জন্য।

বক্ররেখার সমীকরণ থেকে দেখা যায়

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad \text{এবং} \quad y = \frac{-x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}.$$

$$\text{যখন } y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}, \quad \text{তখন } \frac{dy}{dx} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{এবং } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-2}{(1+x)^{\frac{5}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ বিন্দুটি বক্ররেখার পরম মান নির্দেশ করে।

বক্ররেখার কোন চ্যুতিবিন্দু নাই। $y=\frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ অংশের লেখ নীচের দিকে অবতল।

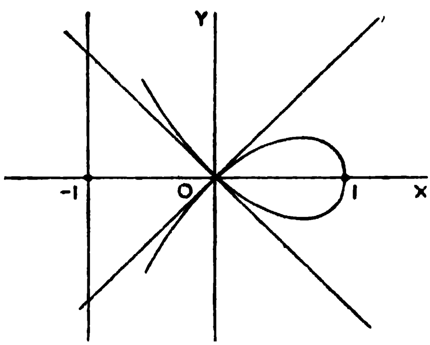
প্রতিসাম্য ধর্ম থেকে দেখা যায় $y=\frac{-x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ অংশের লেখ উপরদিকে অবতল। এই অংশের অবম মানের বিন্দুটি

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \ \frac{-(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right).$$

বক্ররেখার অভিসারক $x=-1$.

বক্ররেখার অসাধারণ বিন্দু (0, 0), উহা একটি পাতবিন্দু। পাতবিন্দুতে স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ $y=x$ এবং $y=-x$.

তাহলে প্রদত্ত বক্ররেখার লেখচিত্র নিম্নরূপ ঃ—



0.08 বক্ররেখাটি যখন $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$ দ্বারা প্রকাশিত তখন বক্ররেখাটির প্রকৃতি আলোচনা ঃ

মনে কর $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$

এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\,\phi'(t)-\phi''(t)\,\psi'(t)}{[\phi'(t)]^3}$

এখন t এর কোন্ কোন্ মানের জন্য $\phi'(t)$ অথবা $\psi'(t)$ শূন্য মান ধারণ করে বা বিচ্ছিন্ন থাকে তা লক্ষ্য করতে হবে। মনে কর t এর সেই সকল মানগুলি $t_1, t_2, \cdots t_k$ (মানের ক্রমানুসারে লেখা হয়েছে)। পরে (t_1, t_2), (t_2, t_3) $\cdots$ (t_{k-1}, t_k) এই অন্তরালগুলিতে $\frac{dy}{dx}$ এর চিহ্নগুলি লক্ষ্য করতে হবে ; তাহলে ফাংশনের

(অর্থাৎ $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t) \Longrightarrow y=f(x)$ আরোহী বা অবরোহী প্রকৃতি জানা যাবে। পরে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ এর সাহায্যে বক্ররেখার ঐ সকল বিন্দুতে উত্তলতা বা অবতলতা পরীক্ষা করতে হবে। অভিসারক নির্ণয়ের জন্য t এর সেই সকল মানগুলি বাহির করতে হবে যেখানে x বা y বা উভয়েই $\pm\infty$ এর অভিমুখকালীন হবে।

$$\text{মনে কর}\quad \left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\}$$

এখানে যেহেতু $\cos^3 t$ এবং $\sin^3 t$ ফাংশন দুইটি পর্যাবৃত্ত (periodic), 2π একটি পর্যায় (period) ; t এর মান 0 থেকে 2π পর্যন্ত কিরূপ পরিবর্তিত হয় তা লক্ষ্য করলেই যথেষ্ট। তাহলে x এর অঞ্চল $[-a, a]$ এবং y এর অঞ্চল $[-a, a]$; সুতরাং বক্ররেখাটির কোন অভিসারক থাকতে পারে না।

$$\text{এখন}\quad \frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$$

$$\text{এবং}\quad \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$$

উপরোক্ত অন্তরকলজগুলি $t=0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$ তে শূন্য মান ধারণ করে।

$$\text{এখন}\quad \frac{dy}{dx}=-\tan t$$

অতএব দেখা যায় যে যখন $t\in\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, তখন $a>x>0, 0<y<a$, $\dfrac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক ; সুতরাং $f(x)$ অবরোহী।

যখন $t\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, তখন $0>x>-a$, $a>y>0$, $\dfrac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক ; সুতরাং $f(x)$ আরোহী।

যখন $t\in\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, তখন $-a<x<0$, $0>y>-a$, $\dfrac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক ; সুতরাং $f(x)$ অবরোহী।

যখন $t\in\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, তখন $0<x<a$, $-a<y<0$, $\dfrac{dy}{dx}$ এর চিহ্ন ধনাত্মক ; সুতরাং $f(x)$ আরোহী।

তাহলে $x=\phi(t)$ এবং $y=\psi(t)$ ফাংশনটি $0\leqslant t\leqslant\pi$, $y\geqslant 0$ এবং $\pi<t\leqslant 2\pi$, $y<0$ এই দুই অন্তরালে দুইটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশনকে সংজ্ঞায়িত করে।

$$\text{এখন} \lim_{t \to \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty$$

$$\text{এবং} \lim_{t \to \frac{3\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \infty.$$

সুতরাং $t = \frac{\pi}{2}$ এবং $t = \frac{3\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শক দুইটি উল্লম্ব।

পুনরায়

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0$$

সুতরাং $t = 0$, $t = \pi$, $t = 2\pi$ বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অনুভূমিক।

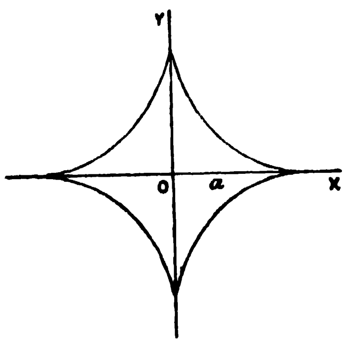
পরে আমরা দেখি

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (3a \cos^4 t \sin t)^{-1}$$

$\therefore$ যখন $t \in (0, \pi)$, তখন $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, সুতরাং বক্ররেখা অবতল।

যখন $t \in (\pi, 2\pi)$, তখন $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, সুতরাং বক্ররেখা উত্তল।

পূর্বোক্ত আলোচনার ফলে আমরা বক্ররেখাটির লেখচিত্র নিম্নরূপে দেখাতে পারি :



এই বক্ররেখাটি কলনবিদ্যায় এ্যাসট্রয়ড (astroid) নামে পরিচিত।

মন্তব্য : ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কে (polar coordinates) বক্ররেখার লেখচিত্র এভাবে আলোচনা করা যেতে পারে। অনেক সময় ধ্রুবীয় স্থানাঙ্কে বক্ররেখার সমীকরণকে কার্টেসীয় স্থানাঙ্কে (cartesian cordinates) প্রকাশ করে উপরোক্ত উপায়ে লেখচিত্র আলোচনা করা সহজসাধ্য হয় ; এর জন্য নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি প্রয়োজন ;

$$x = r \cos \theta \text{ এবং } y = r \sin \theta.$$

পারিভাষিক শব্দাবলী

Absolute convergence—অবাধ অভিসরণ
Absolute value—মাপাঙ্ক
Algebraic number—মূলদ সংখ্যা
Arithmetic continuum—গাণিতিক সম্বন্ধতা
Associative law—সংযোগ নিয়ম
Asymptote—অভিসারক
Bounded set—সপ্রান্ত সেট
,, sequence—সপ্রান্ত ক্রম
,, function—সপ্রান্ত ফাংশন
Cauchy sequence—কসিক্রম
Centre of curvature—বক্রতা-কেন্দ্র
Chord of curvature – বক্রতা-জ্যা
Circle of curvature—বক্রতা-বৃত্ত
Closed interval—বদ্ধ অন্তরাল
Commutative law—বিনিময় নিয়ম
Concavity—অবতলতা
Conditional convergence—সবাধ অভিসরণ
Constant—ধ্রুবক
Continuous function—অবিচ্ছিন্ন (সন্তত) ফাংশন
Convergent sequence—অভিসারী ক্রম
Convergent series--অভিসারী শ্রেণী
Convexity—উত্তলতা
Curvoture—বক্রতা
Cusp—সুঁচাল বিন্দু
Derivative—অন্তরকলজ
Differential—অন্তরকল
Differential coefficient—অন্তরকল সহগ
Differentiation—অন্তরকলন
Discontinuity—অবিচ্ছিন্নতা
Discrete—অসম্বদ্ধ
Distributive law—বিচ্ছেদ নিয়ম
Divergent sequence—অপসারী ক্রম
,, series—অপসারী শ্রেণী
Domain—অঞ্চল
Double limit—দ্বিসীমা
Dynamics—গতিবিজ্ঞান
Enumerable set—গণনীয় সেট
Envelope—মোড়ক
Even function—যুগ্ম ফাংশন
Evolute—বক্রতা-কেন্দ্রজ
Expansion—বিস্তৃতি
Explicit function—প্রত্যক্ষ ফাংশন
Extremum—চরম মান
Function—ফাংশন
Fundamental sequence—মুখ্য ক্রম
Gradient—নতি
Greatest lower bound—গরিষ্ঠ নিম্নপ্রান্ত
Group—গ্রুপ
Homogeneous function—সমমাত্রিক ফাংশন
Implicit function—পরোক্ষ ফাংশন
Independent variabie—নিরপেক্ষ (স্বাধীন) চল
Integer—স্বাভাবিক সংখ্যা বা পূর্ণসংখ্যা
Interval—অন্তরাল
Inverse function—বিলোম (বিপরীত) ফাংশন
Irrational number—'ইররাস্যানাল' (অযৌক্তিক) সংখ্যা

Join of sets—সেটের সংযোগ
Low of closure or stability—অবস্থিতি নিয়ম
Least upper bound—লঘিষ্ঠ উচ্চ প্রান্ত
Limit—সীমা
Maximum—পরম মান
Minimum—অবম মান
Mean-value theorem—মধ্যমমান উপপাদ্য
Monotone sequence—একদিষ্ট ক্রম
,, function—একদিষ্ট ফাংশন
Monotonically increasing—একদিষ্ট আরোহী
,, decreasing—একদিষ্ট অবরোহী
Node—পাতবিন্দু
Non-enumerable set—অগণনীয় সেট
Normal—অভিলম্ব
Odd function—বিযুগ্ম ফাংশন
Open interval—মুক্ত অন্তরাল
Order relation—অনুক্রম সম্পর্ক
Oscillating sequenee—দোলায়মান ক্রম
,, series—দোলায়মান শ্রেণী
Osculating circle—তিন বা ততোধিক বিন্দুস্পর্শী বৃত্ত
Output—উৎপাদ
Parameter—প্রমাত্রা
Partial derivative—আংশিক অন্তরকলজ
Partial differentiation—আংশিক অন্তরকলন
Pedal equation—পাদসমীকরণ
Periodic function—পর্যাবৃত্ত ফাংশন
Point of infexion—চ্যুতিবিন্দু
Polar coordinates—ধ্রুবীয় স্থানাঙ্ক
Pole—মূলবিন্দু বা ধ্রুব
Polynomial—বহুপদ রাশি
Power series—ঘাত শ্রেণী
Principle of induction—আরোহ নীতি
Radius of curvature—বক্রতা-ব্যাসার্ধ
Radius vector—দূরক
Rational number—'র‍্যাসানাল' (যৌক্তিক) সংখ্যা
Real number—বাস্তব সংখ্যা
Removable discontinuity—অপসারণযোগ্য বিচ্ছিন্নতা
Repeated limit—পুনরাবৃত্ত সীমা
Sequence—ক্রম
Series—শ্রেণী
Set—সেট
Slope—নতি
Speed—দ্রুতি
Subtangent—উপস্পর্শক
Subnormal—উপাভিলম্ব
Successive derivative—ক্রমিক অন্তরকলজ
Tangent—স্পর্শক
Total differential—সম্পূর্ণ অন্তরকল
Transcendental number—অমূলদ সংখ্যা
Variable—চল
Velocity—বেগ
Venn's diagram—ভেন চিত্র

শুদ্ধিপত্র

পাতা ৫ লাইন ৬ঃ ‘থেকে’ কথাটি বাদ যাবে

পাতা ৭ লাইন ৩০ঃ স্বাভাবিক-সখ্যার→স্বাভাবিক সংখ্যার

পাতা ৯ লাইন ২৪ঃ a, a ϵ R→a, $a \in R$

পাতা ১১ লাইন ১৯, ২০, ২২; পাতা ১২ লাইন ১, ১৩ : চরম→পরম

পাতা ১৪ লাইন ২৪ঃ ‘যৌক্তিক’ কথাটি বাদ যাবে

২৭ঃ চরম→পরম

পাতা [illegible] লাইন ১৮ঃ বাস্তক→বাস্তব

পাতা ২৫ লাইন ১০ঃ কোতল→বোতল

পাতা ৫৭ লাইন ৯ঃ $N+>\frac{1}{\epsilon} \rightarrow N+p>\frac{1}{\epsilon}$

পাতা ৬০ লাইন ১ঃ $u_2=\frac{1}{1.3} \rightarrow u_2=\frac{1}{2.3}$

পাতা ৭০ লাইন ২৩ঃ $U+a_{n+p} \rightarrow U-a_{n+p}$

পাতা ৭৩ লাইন ৪ঃ $\frac{1}{3\,!}<\frac{1}{2^3} \rightarrow \frac{1}{3\,!}<\frac{1}{2^2}$

৮ঃ $+\frac{1}{2}- \rightarrow +\frac{1}{2}$

পাতা ৭৬ লাইন ১০ঃ অপসারণ → অপসরণ

পাতা ৮০ লাইন ১৭ঃ সংখ্যাটি → সীমাটি

পাতা ৮৫ লাইন ২ঃ $(\overline{\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \rightarrow (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

পাতা ৮৬ লাইন ১২ঃ $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

পাতা ৯৭ লাইন ৮ঃ $f(a+b) \rightarrow f(ab)$

পাতা ১০৮ লাইন ৯ঃ $l_3 \rightarrow l_2$

পাতা ১১৬ লাইন ১০ঃ $\lim_{y\to b} f(y)=f(b) \rightarrow \lim_{y\to l} f(y)=f(l)$

পাতা ১১৭ লাইন ২১ঃ $x_1=\frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow x_1=\frac{2}{(4n-1)\pi}$

পাতা ১২০ লাইন ১৫ : $\left(1+\dfrac{y}{y-1}\right)^{y-1} \to \left(1+\dfrac{1}{y-1}\right)^{y-1}$

পাতা ১২১ লাইন ১১ : $\leqslant |\,x\,| \to \leqslant |\,x\,| < \delta.$

১২ : $|\sin\frac{1}{x}| \leqslant | < 1 \to |\sin\frac{1}{x}| \leqslant 1$

পাতা ১২৪ শেষ লাইন : $y-x=mx^2 \to y^2-x=mx^2$

পাতা ১২৮ লাইন ৭ : $|\sin x+\sin a| \to |\sin x-\sin a$

পাতা ১৬২ লাইন ১৩ : $\epsilon\to 0 \to \epsilon>0$

পাতা ১৬৩ লাইন ৮ : সংজ্ঞিত → সন্তত

পাতা ১৬৭ লাইন ৮ : $y=f(x) \to y=f(z)$

পাতা ১৬৯ লাইন ২২ : ফাংশনের → n সংখ্যক ফাংশনের

পাতা ১৭৩ লাইন ১৩ : $-\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) \to +\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$

পাতা ১৭৪ লাইন ১০ : $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) \to \dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x)$

পাতা ১৭৬ লাইন ১৪ : $e^{\frac{x}{-}} \to e^{\frac{x}{e}}$

পাতা ১৭৭ লাইন ১৮ : $x=\log_e y \to x=\log_a y$

পাতা ১৭৯ লাইন ৫ : $\dfrac{dx}{dy} \to \dfrac{dy}{dx}$

পাতা ১৮৩ লাইন ৪ : $\dfrac{1}{1-x^2} \to \dfrac{1}{1+x^2}$

পাতা ১৯০ লাইন ৪ : $\cos^5\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm x\right) \to \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\pm x\right)$

পাতা ১৯২ লাইন ২০ : $\dfrac{m^2}{\sqrt{(1+x^2)}} \to \dfrac{m^2}{\sqrt{(1-x^2)}}$

২৫ : $+n(n-1)y_n+ \to -n(n-1)y_n-$

পাতা ১৯৫ লাইন ৮ : $\binom{n}{r}v_{n-1}\,w_r \to \binom{n}{r}v_{n-r}\,w_r$

পাতা ১৯৬ লাইন ১ : $\left\{\dfrac{7x-3}{(x-1)(x-2}\right\} \to \left\{\dfrac{7x-6}{(x-1)(x-2)}\right\}$

পাতা ২০০ লাইন ১১ : $\dfrac{d^3x}{dt^3} \to \dfrac{d^2x}{dt^2}$

১৩ : $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 \to \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3$

পাতা ২০১ লাইন ১৪ : $4axy \rightarrow 3axy$

পাতা ২০২ লাইন ৯ : $\dfrac{d^2y}{dx^3} \rightarrow \dfrac{d^2y}{dx^2}$

পাতা ২০৩ লাইন ১১ : $y^n \rightarrow y_n$, $(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}} \rightarrow (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}$

পাতা ২০৬ লাইন ২০ : মুক্ত → বদ্ধ

পাতা ২০৭ লাইন ৪ : $M \leqslant m \rightarrow M \geqslant m$

পাতা ২১১ লাইন ১১ : $f(1)-f(2) \rightarrow f(1)-f(-2)$

২৮ : $a-b \rightarrow b-a$

পাতা ২১৩ লাইন ১ : $1 \leqslant x \leqslant \log_e e \rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3$

পাতা ২২০ লাইন ১০ : $+f^{(n)}(a+\theta h) \rightarrow \cdot f^{(n)}(a+\theta h)$

পাতা ২২৭ লাইন ৮ : $[a, b] \rightarrow (a, b)$

পাতা ২৩১ লাইন ৮ : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

পাতা ২৩৩ লাইন ৪ : $-a_2x \rightarrow +a_2x^2$

পাতা ২৩৪ লাইন ৭ : $f(x)=f(x)+ \rightarrow f(x)=f(0)+$

পাতা ২৩৫ লাইন ২ : $\dfrac{1}{1-\xi^2} \rightarrow \dfrac{1}{1+\xi^2}$

৩ : $\tan^{-1}b-\tan^{-1}b \rightarrow \tan^{-1}b-\tan^{-1}a$

পাতা ২৪৮ লাইন ১৪ : পরম → চরম

পাতা ২৫০ লাইন ৫ : $-2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}$

পাতা ২৬৪ লাইন ১০ : $u^2 \rightarrow v^2$

১৩ : $\dfrac{dv}{dv} \rightarrow \dfrac{du}{dv}$

পাতা ২৭৩ লাইন ১ : চিত্রের → চিহ্নের

১০ : $(x, y) \rightarrow (x, y, z)$; $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$

পাতা ২৭৬ লাইন ২২ : $1 \cdot \triangle x+0 \cdot \triangle y \rightarrow 1 \cdot \triangle x+0 \cdot \triangle y=\triangle x$

পাতা ২৭৭ লাইন ৭ : $\sin^2 z\,dz \rightarrow \sin 2z\,dz$

পাতা ২৭৮ লাইন ১৯ : $+hf_x+kf_y \rightarrow -hf_x-kf_y$

পাতা ২৭৯ লাইন ৫ : $J_y \rightarrow f_y$

পাতা ২৮৭ লাইন ৮ : $\sin u \dfrac{\partial u}{\partial x} \rightarrow -\sin u \dfrac{\partial u}{\partial x}$

পাতা ২৯০ লাইন ৩ : $\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}$

৪ : $x\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow y\frac{d}{\partial y}$

পাতা ৩০০ লাইন ৯ : $a^2+x^2 \rightarrow a^2-x^2$

পাতা ৩১২ লাইন ৬ : $\frac{ds}{dx} \rightarrow \frac{ds}{dy}$

পাতা ৩২০ লাইন ৪ : 10.16 → 10.17

পাতা ৩২৪ লাইন ৪ : পদ-সমীকরণ → পাদ-সমীকরণ

পাতা ৩২৮ লাইন ১৬ : $\frac{x^2}{y^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2}$

পাতা ৩৪৭ লাইন ১৪ : $\sqrt{}a^2+b^2 \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}$

পাতা ৩৫৮ লাইন ৭ : $1=\cos\tau \rightarrow 1-\cos\tau$

পাতা ৩৬৩ লাইন ৩ : $x^2=\pm 1 \rightarrow x=\pm 1$

পাতা ৩৬৪ লাইন ১১ : $x=0$ বা Y-অক্ষের → $y=0$ বা X অক্ষের

১৬ : $y=0$ বা X-অক্ষের → $x=0$ বা Y অক্ষের

১৯ : $x=x \rightarrow x=0$

পাতা ৩৮০ লাইন ১১ : $\log_x \rightarrow \log x$

পাতা ৩৮১ লাইন ৮ : $4x^2y^2-x^2-x^2 \rightarrow 4x^2y^2-x^2-y^2$

পাতা ৩৯৩ লাইন ১৫ : $g(x,y) \rightarrow tg(x,y)$

পাতা ৪১৬ লাইন ৪ : $\frac{d^2(R-\pi)}{dx^3} \rightarrow \frac{d^2(R-\pi)}{dx^2}$

৫ : $\frac{d^3(R-\pi)}{dx^2} \rightarrow \frac{d^2(R-\pi)}{dx^2}$

৭ : $3\angle(\pi-b) \rightarrow 3\angle(\beta-b)$

১১ : $\frac{p}{\pi} \rightarrow \frac{p}{x}$

পাতা ৪১৭ লাইন ১০ : $\frac{p}{px} \rightarrow \frac{p}{bx}$

পাতা ৪১৯ লাইন ১২ : $(-e^{-at}) \rightarrow (-ae^{-at})$

পাতা ৪২৮ লাইন ১৮ : $K_0 \rightarrow x_0$